Med rätt att utmanas – i en skola för alla

Att utveckla verksamheten kring att inkludera elever med särskild begåvning i lärande.

Del 2: Uppgifter

Ett skolutvecklingsprojekt i Karlstads kommun 2015–2017

Elisabet Mellroth

Version 2, juni 2018. Rapporten kommer att revideras och uppdateras regelbundet.

Erik Johan Ljungbergs utbildningsfond har finansierat projektet

KARLSTADS KOMMUN

LJUNGBERGS FONDEN

Förord till andra versionen av rapporten, juni 2018.

Projektet är genomfört med Karlstads kommun som huvudman. Erik Johan Ljungbergs utbildningsfond har finansierat projektet.

Texten kommer löpande att uppdateras och revideras. Du som läsare är varmt välkommen att höra av dig om du hittar felaktigheter, språkliga såväl som matematiska. Mejla då elisabet.mellroth@karlstad.se

Texten är sammanställd av Elisabet Mellroth, projektledare, som också ansvarade för revideringen av rapporten under våren 2018.

Tack till Elisabeth Nyberg för språkliga kommentarer.

Tack till Ragnhild Eriksson som har gjort de flesta av illustrationerna.

Innehåll

Fåret Eric, åk 1–9

Problemet handlar om en kö med får som väntar på att bli klippta. Uppgiften genomfördes i alla klasser från åk 1 upp till åk 9 under projektet.

Uppgiften engagerade alla elever, i samtliga årskurser. En av lärarna genomförde uppgiften med kollegorna på skolan, samt med elevernas vårdnadshavare vid föräldramöte, det blev mycket uppskattat i båda fallen.

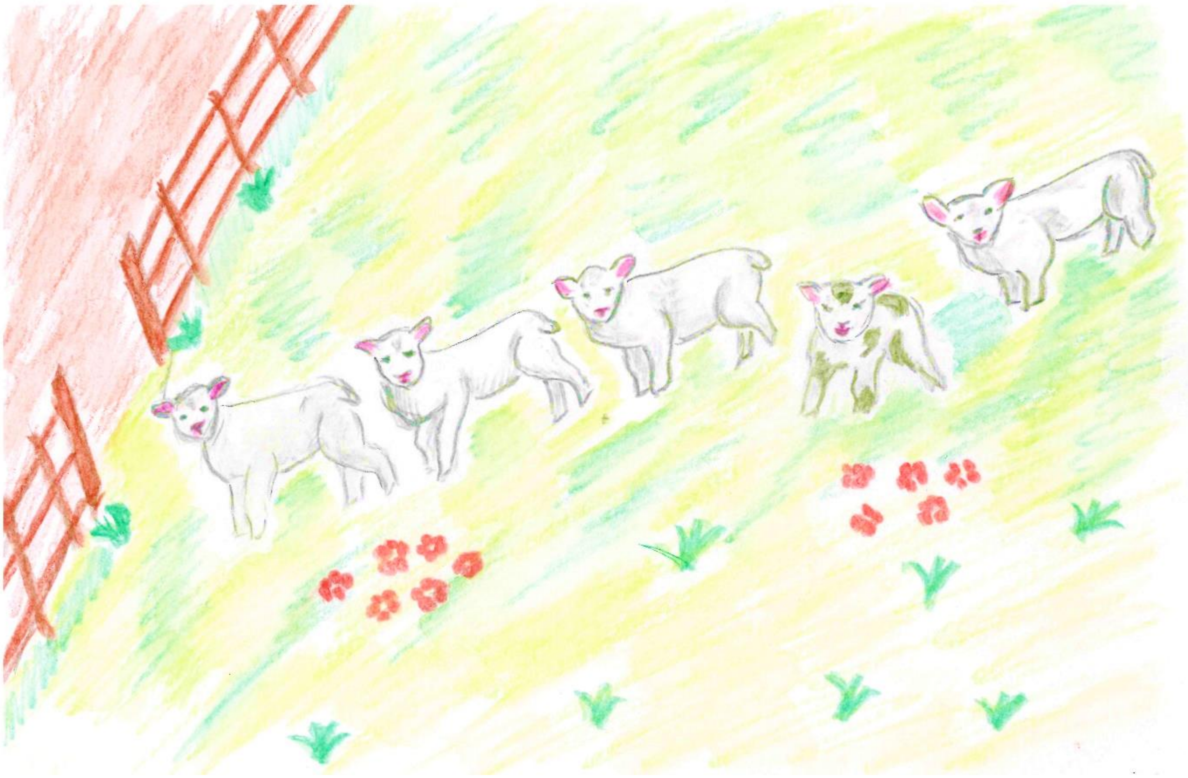
Vi betonar vikten av att på något sätt dramatisera uppgiften som en introduktion. Det är många begrepp, ord och uttryck som kan upplevas svåra för de yngre, samt för de med svenska som andra språk. Dessutom finns det vissa händelser som bör redas ut tillsammans med klassen, innan arbetet med själva uppgiften börjar. Till exempel sägs det att Eric hoppar förbi 2 får, men om han bara har ett får framför sig i kön – vad gör han då? Problemets ’regler’ bestäms alltså ihop med eleverna vid introduktionen av uppgiften.

Uppgiftsformulering – Fåret Eric

Eric är sist i kön och han är alldeles för otålig för att vänta på sin tur. Varje gång Klipparen tar det fåret som står längst fram i kön passar Eric på att gå förbi de två får som står närmast framför honom.

Alternativ uppgiftsformulering:

Eric är ett otåligt får. Han står längst bak i kön för att klippas. När Klipparen tar fåret längst fram i kön passar Eric på att smyga förbi två av sina fårkompisar.



a) Beroende på hur många får som står framför Eric i kön, hur många får kommer att klippas innan Eric?

b) Hur räknar du för att tala om hur många får som kommer att klippas innan Eric om du får reda på hur många får som står framför honom?

Utökning

Vad händer om Eric är ännu mer otålig?

- Om han smyger förbi 3 får i taget?
- Kan du förutsäga hur många som kommer klippas innan Eric även då?
- Om han smyger förbi 4, eller 5 eller ...?
- Vad händer om det är två Klippare?
- Om ...?

Material

- Konkret material som symboliserar får, t.ex. legobitar, gem etc. Varje elevgrupp bör ha minst 24 st ”får”.
- Färdiga tabeller, se elevdokument, kopieras till eleverna. Anpassningar kan göras t.ex. beroende på elevernas läs- och skrivförmåga.

Genomförandet

Tid: 1–3 klocktimmar.

Börja med att spela upp situationen, det kan t.ex. göras rent fysiskt genom att låta några elever spela upp några händelser, eller t.ex. med ’magnetpluppar’ på Whiteboarden. Konkretiseringen av problemet skapar intresse och bidrar till att alla kan börja arbeta senare.

Härefter hade vi två alternativa sätt att genomföra uppgiften, alternativ 1 och alternativ 2. I slutet av projektet föredrog vi alternativ 2, men eftersom alternativ 1 bättre överensstämmer med originalet från maths300 presenterar vi även det alternativet här.

Alternativ 1

Eleverna ges ett antal nummerkort som visar hur många får som står före Eric i kön. Enskilt eller i grupp tar eleverna reda på hur många får som blir klippta innan Eric, för respektive nummerkort. Efter lämplig tid, då eleverna har hunnit igenom olika antal nummerkort, samlar läraren klassens data t.ex. på tavlan genom att fylla i en tabell liknande den i Figur 1.

				o o																				
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

Figur 1 Förslag på tabell att samla klassens data i. Talen i botten på respektive kolumn visar hur många får som stod framför Eric i kön från början. Till exempel visar de två ringarna i kolumn 5 att om det var 5 får före Eric i kön från början, kommer 2 får bli klippta innan Eric klipps.

Genom diskussion i helklass kontrolleras tabellen, ochS eventuella felaktigheter korrigeras.

Härefter får eleverna fortsätta enskilt eller i grupp för att kunna svara på de olika frågorna. De färdiga tabellerna som används direkt i Alternativ 2, se Tillhörande dokument, kan delas ut till eleverna.

Alternativ 2

Eleverna arbetar med frågan fritt en stund, enskilt eller i grupp. Ett förberett elevdokument med bl.a. tabeller finns att dela ut till eleverna direkt, eller efter en stund, se Tillhörande dokument.

Vi klippte isär elevdokumentet vid saxen, ✂. Lärarna var aktiva under elevernas arbete och beredda att ge de utökade frågorna till eleverna allteftersom de blev redo att gå vidare. För att kunna hantera ett sådant arbetssätt, hade lärarna delat upp klasserna i grupper, 6–8 grupper per klass var hanterbart.

Lösningsförslag och matematiskt innehåll

Centrala innehåll, åk 1 – åk 9 i Lgr11, viss omskrivning har ibland gjorts för att passa för hela årskursspannet.

- Naturliga tal och deras egenskaper samt hur talen kan delas upp och hur de kan användas för att ange antal och ordning. (åk 1–3)
- Centrala metoder för beräkningar med naturliga tal, vid huvudräkning och överslagsräkning samt vid beräkningar med skriftliga metoder och digitala verktyg. Metodernas användning i olika situationer. (åk 1–9)
- Algebraiska uttryck och ekvationer i situationer som är relevanta för eleven. (åk 4–9).
- Hur mönster i talföljder och enkla geometriska mönster kan konstrueras, beskrivas och uttryckas (åk 1–9)
- Tabeller och diagram för att sortera data och beskriva resultat från undersökningar, såväl med som utan digitala verktyg. (åk 1–9)
- Strategier för matematisk problemlösning i enkla situationer. (åk 1–9)

Lösningsförslag och lösningstips

Genom att testa sig fram på olika sätt; tänka, konkret material, drama, diskussioner etc, och genom att samla sina data för händelsen 'Eric hoppar över 2 får och det finns 1 Klippare' kan en tabell liknande **Tabell 1** bildas.

Tabell 1 Ifylld tabell för händelsen Eric hoppar över två får och det finns en Klippare

Antal får före Eric i kön	Antal får som klipps före Eric
1	1
2	1
3	1
4	2
5	2
6	2
7	3
8	3
9	3
10	4
11	4
...	...

I tabellen kan elever upptäcka mönster och uttrycka dem på olika sätt, elevernas varianter är naturligtvis oändliga. Vi vill dock uppmana till att uppmuntra även enkla fynd. Några exempel ges här:

- Samma antal får blir klippta före Eric tre gånger på varandra.
- Antalet får framför Eric kan öka med två stycken, utan att antalet får som blir klippta innan Eric förändras.
- Efter var 3:e får ökar antalet får som klipps innan Eric med ett.

- När antalet får framför Eric finns med i treans tabell får man antalet får som klipps innan Eric genom division med 3.

Några elever finner det generella sambandet, eller är på väg mot det generella. De kan till exempel uttrycka sig så att ni som lärare förstår att det har att göra med generaliserbarhet genom uttryck i stil med nedanstående.

- När man dividerar antalet får före Eric med 3 och avrundar uppåt till närmsta heltal så ges antalet får som klipps innan Eric.

Elever som är matematiskt särskilt begåvade har enligt Krutetskii (1976) oftast lätt att förstå matematiska symboler t.ex. variabler och de uppskattar att kunna förenkla de matematiska beskrivningarna. Om ni misstänker att eleven är redo, inför gärna en variabel t.ex. x för antalet får i kön före Eric och fråga hur de skulle beskriva antalet får som klipps innan Eric då. Man behöver också tala om att det man beräknar är antalet får som klipps innan Eric, man kan införa en variabel för det t.ex. y. I vårt projekt har vi erfarenhet av elever i 10 årsåldern som med lätthet arbetar med variabler och formler. Elever kan då t.ex. uttrycka sig på liknande sätt:

- $\frac{x}{3}$ och runda av uppåt, så måste det bli.

Mer matematiskt korrekt hade varit:

Låt x vara antalet får före Eric i kön. Om x är delbart med 3 så är antalet får som klipps före Eric $\frac{x}{3}$. Om inte så avrundar man uppåt till närmaste heltal.

Om variabler införs bör de definieras innan de används. Något man som lärare kan diskutera med denna typ av elever.

Om Eric hoppar över fler än 2 får

I de utökade frågorna hoppar Eric över fler än 2 får, med tabell som arbetsmetod kan det resultera i tabeller som kan likna de i Figur 2.

Hoppar över 2	
Antal får före	Får klippta före
1	1
2	1
3	1
4	2
5	2
6	2
7	3
8	3
9	3
10	4
11	4

Hoppar över 3	
Antal får före	Får klippta före
1	1
2	1
3	1
4	1
5	2
6	2
7	2
8	2
9	3
10	3
11	3

Hoppar över 4	
Antal får före	Får klippta före
1	1
2	1
3	1
4	1
5	1
6	2
7	2
8	2
9	2
10	2
11	3

Figur 2 Exempel på hur tabeller kan se ut i fallen då Eric hoppar över 2, 3 respektive 4 får åt gången.

Exempel på slutsatser eleverna kan ge:

- Om Eric hoppar över 2, 3, 4 ...får kommer antalet får som klipps innan Eric att öka var 3:e, 4:e, 5:e ...gång
- Om Eric hoppar över 2, 3, 4 ... får, kan man avgöra hur många får som klipps före Eric genom att dividera antalet får före Eric i kön med (2+1), (3+1), (4+1)...
    - Om kvoten blir ett heltal ger detta heltal antalet får som klipps innan Eric – annars avrundar man uppåt till närmaste heltal.
- Om, *y*, anger hur många får som klipps före Eric, *x* är antalet får före Eric i kön och *h* är antalet får Eric hoppar över när Klipparen tar fåret längst fram till klippning, så är $y = \frac{x}{h+1}$, om *x* är delbart med *h+1*. Om *x* inte är delbart med *h+1*, avrundar man $y = \frac{x}{h+1}$, uppåt till närmsta heltal.

Flera Klippare

Antag att det står *N* st får framför Eric i kön vid tiden t=0, att Eric hoppar över *m* st får varje gång och att det finns *n* st klippare. Alla klipparna tar varsitt får exakt samtidigt.

Vi vill veta hur många får som klipps före Eric.

Detta är samma sak som att ta reda på hur många får som har klippts innan Eric hamnar längst fram i kön, dvs. innan det står 0 st får framför Eric i kön.

Vi vet alltså att vid varje tidsenhet, *t*, utom möjligtvis den sista, klipps det *n* st får.

Fram tills den sista tidsenheten har vi att antalet får, *y*, framför Eric i kön ges av

$$y = N - mt - nt$$

Vi vill veta hur många tidsenheter det tar innan det finns färre än *n* st får framför Eric, dvs vi vill lösa

$$y \leq n - 1$$

Det ger

$$N - mt - nt \leq n - 1$$

vilket ger

$$t \geq \frac{(N - n + 1)}{(m + n)}$$

Eftersom vi bara är intresserade av heltalslösningar för *t*, och eftersom vi vill veta vid vilken tidsenhet detta händer, så har vi att

$$t = \left\lceil \frac{(N - n + 1)}{(m + n)} \right\rceil$$

Där ⌈ ⌉ betecknar takfunktionen (kul som fördjupning för intresserade barn!) som avrundar ett tal *x* till det närmsta större heltalet, t.ex. $\lceil 3{,}14 \rceil = 4$.

Vid denna tidsenhet är antalet klippta får

$$nt = \left\lceil \frac{(N - n + 1)}{(m + n)} \right\rceil$$

Vi ser att då $m = 2$ (Eric hoppar över 2 får) och $n = 1$ (en klippare), har vi att

$$nt = \left\lceil \frac{(N - n + 1)}{(m + n)} \right\rceil = \left\lceil \frac{N}{3} \right\rceil$$

vilket är det vi kom fram till i den första problemställningen. Det man troligtvis börjar med som elev är att göra diverse tabeller även över det här fallet.

Fördjupningsmöjlighet

För den elev som ligger riktigt långt fram i sin matematikutveckling, samt för den som kan behöva fördjupning i matematiken, kan man införa takfunktionen som nämns i lösningen till fallet med flera klippare, det finns även möjlighet att införa moduloräkning, eftersom problemet har med rester vid division att göra. Lösningen på problemet blir då följande, när Eric hoppar över två får:

y = antal får som klipps innan Eric

x = antal får i kön före Eric

$$\begin{aligned}
&om\ x \equiv 0\ mod\ 3, alltså\ \text{om}\ x\ \text{är}\ delbart\ med\ 3\\
&y = \frac{x}{3}\\
&om\ x \equiv 1\ mod\ 3, alltså\ \text{om}\ (x - 1)\ \text{är}\ delbart\ med\ 3\\
&y = \frac{x}{3} + \frac{2}{3}\\
&om\ x \equiv 2\ mod\ 3, alltså\ \text{om}\ (x - 2)\text{är}\ delbart\ med\ 3\\
&y = \frac{x}{3} + \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

Då Eric hoppar över n st får och x är antalet får i kön framför Eric, om $x \equiv z\ mod\ (n + 1)$, d.v.s. om (x-z är delbart med (n+1)) så är antalet får, y, som blir klippta innan Eric

$$y = \frac{x}{n + 1} + \frac{n + 1 - z}{n + 1} = \frac{x + n + 1 - z}{n + 1}$$

Detta är en matematisk hypotes som troligtvis inte är rimligt att ens en matematiskt särskild begåvad grundskoleelev kommer fram till. Vi vill dock nämna det för att visa på uppgiftens djup.

För en särskilt begåvad elev kan det vara en möjlighet att introducera modulabegreppet. Ett sätt att erbjuda eleven berikning i matematik.

Tillhörande dokument

Nummerkort

1	2	3
4	5	6
7	8	9
10	11	12
13	14	15

16	17	18
19	20	21
22	23	24
25		

Elevdokument

Eric är ett otåligt får. Han står längst bak i kön för att klippas. När Klipparen tar fåret längst fram i kön passar Eric på att smyga förbi två av sina fårkompisar.

Beroende på hur många får som står framför Eric i kön, hur många får kommer att klippas innan Eric?

Antal får före Eric	Antal får som klipps innan Eric
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	
11	
12	
13	
14	
15	
16	
17	
18	
19	
20	
21	
22	
23	
24	

Går det att hitta ett mönster som gör att ni kan berätta hur många får som kommer klippas innan Eric, om ni får reda på hur många får som står före Eric från början.

Antal får i kö framför Eric	Antal får som kommer att klippas innan Eric
30	
37	
44	
45	
57	
141	
356	
1541	
10 000	
1 000 000	

Hur räknar du för att tala om hur många får som kommer att klippas innan Eric om du får reda på hur många får som står framför honom?

Berätta!

✂———————————————

Vad händer om Eric är ännu mer otålig?

- Om han smyger förbi 3 får i taget?
- Kan du förutsäga hur många som kommer klippas innan Eric även då?
- Om han smyger förbi 4, eller 5 eller ....?
- Vad händer om det är två Klippare?

✂———————————————

Välj själv antalet Klippare, och den egen ”smyga förbi-regel” och försök hitta och beskriva ett mönster som berättar hur många får som kommer att klippas innan Eric.

Didaktiska och pedagogiska kommentarer

Som introduktion, dramatisera fårklippningen, med Eric i kön, det fångar eleverna och gör dem nyfikna. Dramatiseringen kan göras med elever som spelar får, eller med olika typer av material. På högstadiet kan dramatiseringen upplevas som lite pinsam, men vi ansåg att den var behövlig. Varje lärare känner sin klass bäst och avgör vad som kan göras i respektive klass.

Ha konkret material tillgängligt som symboliserar får, det underlättade för eleverna och bidrog till ökat engagemang. Vi tipsar dock om att försöka använda så neutralt material som möjligt, t.ex. centikuber, en del elever kan lockas till att börja leka med djuren om man använder djur.

En del ord kan behöva förklaras, speciellt för de yngre barnen och troligtvis för dem som inte fullt behärskar det svenska språket. Dramatiseringen hjälper till förståelse. Exempel på ord/begrepp som kan behöva förklaras;

- Fårklippning
- Smita före
- Antal får före i kön
- Antal får som blir klippta
- Två eller flera Klippare*

**Fallet när det är två eller flera klippare bör diskuteras kring hur Klipparna tar fåren. Om det ska göra skillnad måste Klipparna ta ”sina” får vid exakt samma tillfälle.*

Nummerkorten, alternativ 1, upplevdes onödiga och de kunde ersättas av tabellen med uppmaningen att eleverna kan få börja var de vill i tabellen. Elever med lite uthållighet kan styras att börja så att de snabbare kan se mönstret.

I projektet har vi använt olika arbetssätt i olika klasser och för olika elever, t.ex.;

- arbeta enskilt – några elever har föredragit det,
- parvis,
- gruppvis – oftast inte fler än 3 elever per grupp,
- helklass,
- EPA-metoden (Enskilt – Par – Alla) eller varianter av den har också använts.

Gemensamt har varit att alla har haft en uppsamlande helklassdiskussion kring uppgiften när det varit dags att avsluta den.

Att ha en tabell, exempelvis enligt Figur 1, på tavlan där klassens resultat samlas, på olika sätt, har upplevts som positivt. En del av lärarna har aktivt styrt uppsamlingen av klassens resultat, andra har uppmanat eleverna att själva gå och fylla i när de haft ett resultat att fylla i. Speciellt intressant blir det när ”räknemissar” upptäcks och diskuteras.

För de elever som är svaga eller inte kommit så långt i sin matematikutveckling kan man begränsa antalet får i kön till ett mindre antal och uppmuntra dem till att undersöka vad som händer om Eric hoppar över 3 får, 4 får och vad som händer när det är två klippare.

De elever som är särskilt begåvade i matematik och/eller långt framme i sin matematikutveckling kommer snabbt att se mönstret som bildas, då behöver man som lärare vara snabb och utmana dem i det skedet. Dels på grund av att de ska komma djupare in i matematiken, men också för att ge dem som ännu inte hittat mönstret chans att hitta det själva. De som är snabba kan behöva hjälp och stöttning med att träna förmågan att uttrycka de samband de hittat matematiskt korrekt. En yngre elev kan klara av att uttrycka det med ord, en högstadieelev med formler. Underskatta dock inte de yngre elevernas förmåga att kunna förstå och använda variabler och formler.

Referenser och källor

Maths300.com

Bygga Vyer (åk 1–9)

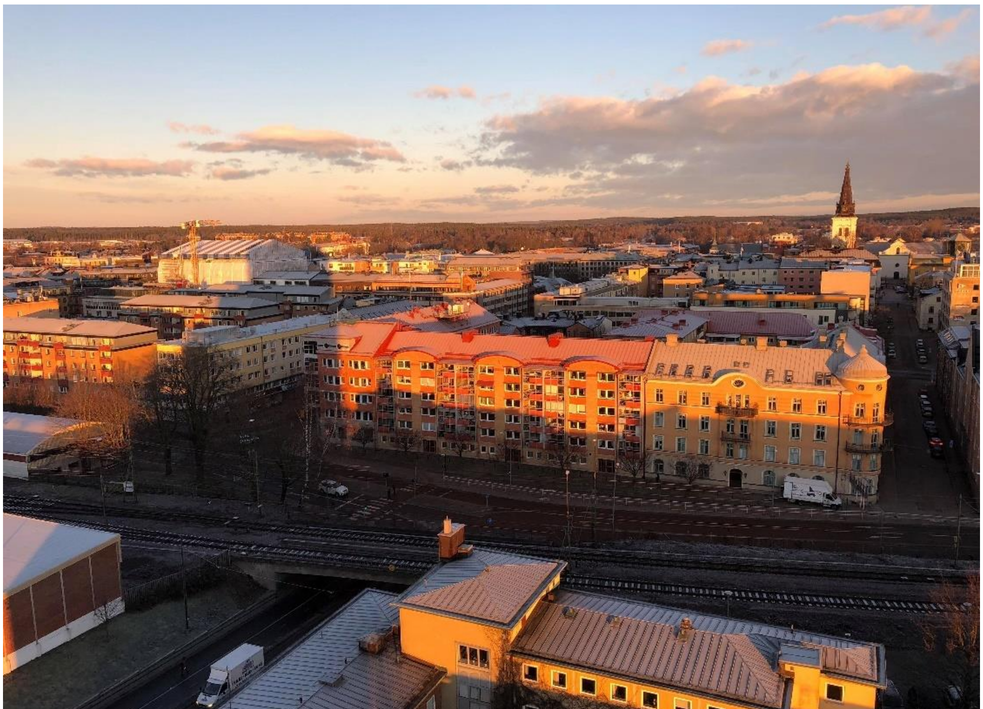
Bygga vyer är en uppgift där vi har utgått från Maths300.com, den är tänkt att passa för elever från årskurs 3 till årskurs 12 i det australiensiska systemet. Därför är detta en av de två uppgifter som vi genomfört i samtliga årskurser från åk 1 till åk 9 i det svenska systemet. Vi har arbetat om uppgiften ganska mycket, i det format vi presenterar den upplevde vi den som en mycket engagerande uppgift för elever i alla åldrar. Elever med rumslig matematisk förmåga gavs möjlighet att visa sin kompetens via arbetet med denna uppgift. Därigenom lyftes en del elever som vid aritmetiska och algebraiska uppgifter inte kommer fram.

Uppgiften handlar om att göra geometriska konstruktioner från 2D till 3D och vice versa. Genom math300.com kunde vi använda oss av en programvara som underlättade, snabbade upp och förenklade en fördjupning av arbetet med problemet. Alla lärare använde dock inte programvaran, det fungerar bra att arbeta med uppgiften även utan programmet.

Lärarna fick använda ovanligt mycket tid till förberedelse för att planera uppgiften, det var nödvändigt men väl värt eftersom den skapade ett stort engagemang hos eleverna. Det är viktigt att läraren håller en demonstration om hur ritningarna ska tolkas och vad som menas med toppvy, framifrånvy och sidovy, innan eleverna börjar arbeta själva.

Instruktionerna till eleverna kan ges skriftligt eller muntligt, läraren känner eleverna och vet vad som blir bäst i respektive grupp. Man kan med fördel sätta uppgiften i ett sammanhang till exempel genom följande berättelse:

En ny stadsdel ska byggas i området. Grannarna undrar hur husen kommer att se ut och vilken utsikt de kommer att se? Kommer de att få en innergård, parkeringsplats eller finns det utrymme för balkong? Hur kommer utsikten att se ut från fönstret? Vilken vy kommer kvarteret bredvid att få?

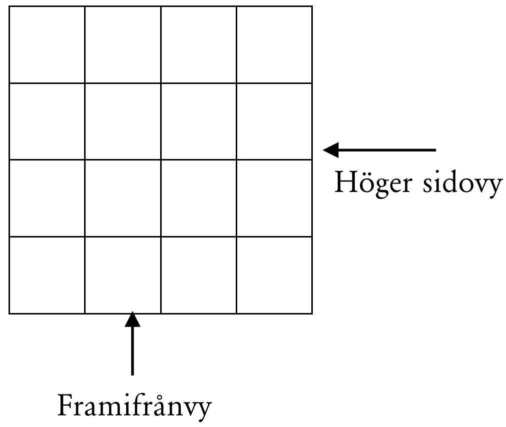


Karlstad från Löfbergsskrapan. Foto Andes Thorén.

Uppgiftsformulering – Bygga vyer

För varje toppvy, som ges för konstruktion 1 till 5.

1. Bygg konstruktionen.
2. Res dig, titta på konstruktionen i ögonnivå och blunda med ena ögat.
3. Skissa *framifrånvyn* och *höger sidovy* för respektive konstruktion.



Konstruktion 1

1	0	2	3
1	1	0	1
2	1	1	2
1	0	0	1

Konstruktion 2

3	0	1	0
2	0	2	1
0	0	1	0
2	0	1	1

Konstruktion 3

0	2	1	3
0	1	0	2
0	2	0	3
1	1	1	1

Kan du skissa dessa utan att bygga?

Konstruktion 4

1	4	2	0
1	1	1	1
0	0	1	0
2	0	1	1

Konstruktion 5

1	0	2	4
2	0	1	1
3	1	0	2
1	0	2	1

Utökning

För varje par av framifrånvy och sidovy är dina utmaningar att:

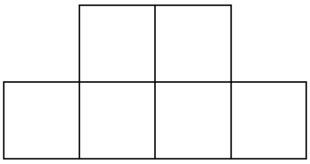
a) Bygga en konstruktion som motsvarar de båda vyerna. Skriv upp hur många kuber du använde vid a: Antal kuber.

b) Bygg samma konstruktioner med så få klossar du kan. Skriv upp antalet klossar vid b: minimum.

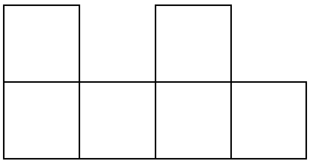
c) Bygg samma konstruktion med så många klossar du kan. Skriv upp antalet klossar vid c: maximum.

d) Hur många variationer av minimum för respektive konstruktion finns det? Skriv upp ditt svar vid d: antal variationer. Hur ska du på ett effektivt sätt kunna ta reda på det?

1. Framifrånvy



Sidovy



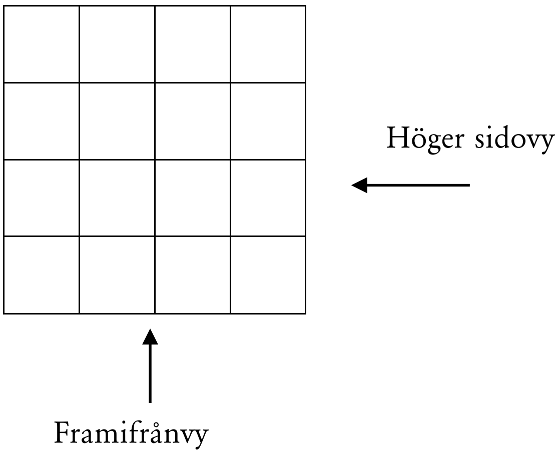
a: Antal kuber:_______

b: Minimum:________

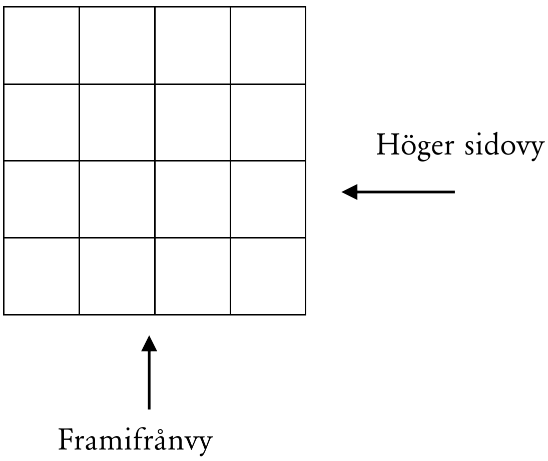
c: Maximum:________

d: antal variationer:____

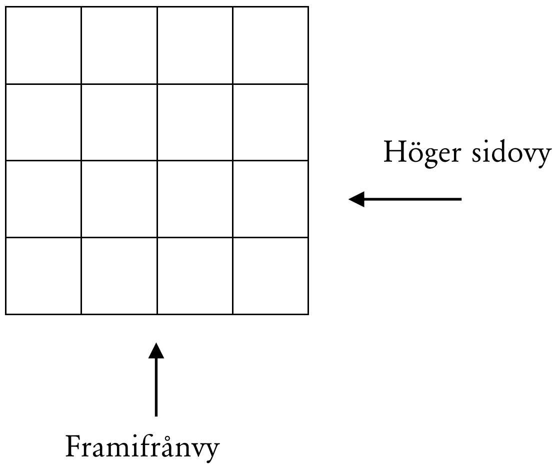
Min lösning



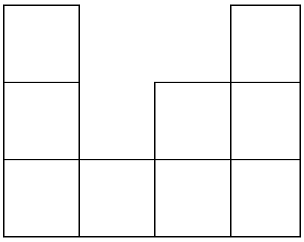
Minimum antal kuber

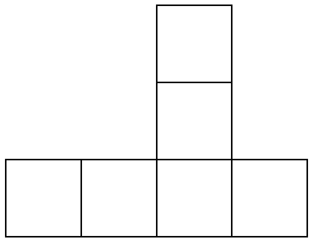


Maximum antal kuber



2. Framifrånvy **Sidovy**





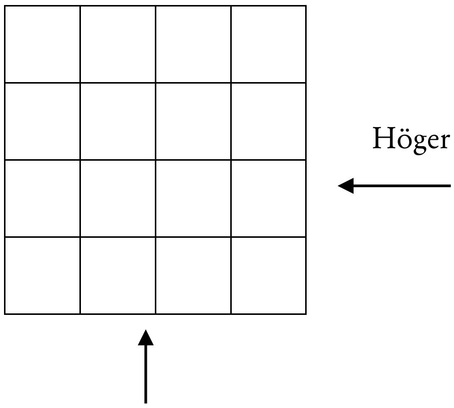
a: Antal kuber:_______

b: Minimum:________

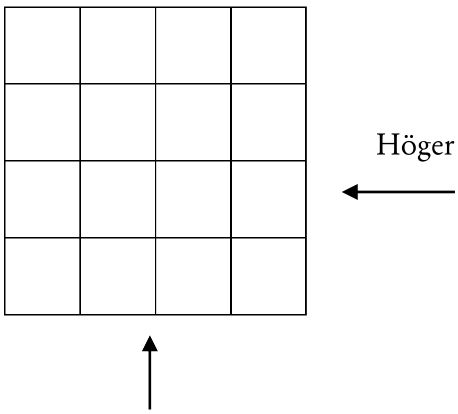
c: Maximum:________

d: antal variationer:____

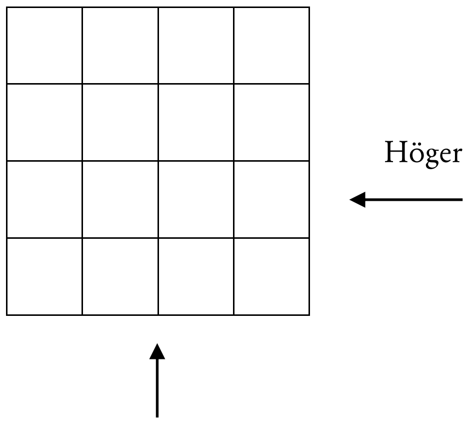
Min lösning



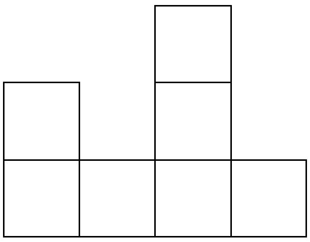
Minimum antal kuber



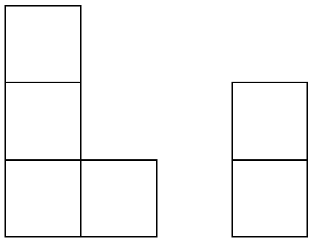
Maximum antal kuber



3. Framifrånvy



Sidovy



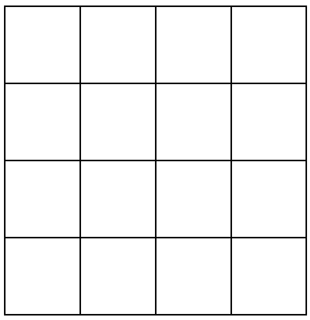
a: Antal kuber:_______

b: Minimum:________

c: Maximum:________

d: antal variationer:____

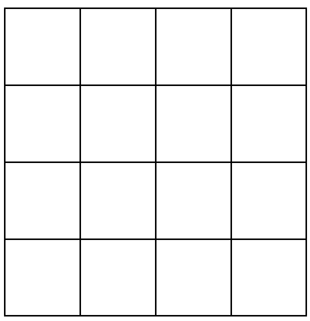
Min lösning



Höger sidovy

Framifrånvy

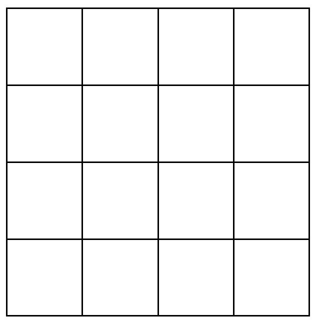
Minimum antal kuber



Höger sidovy

Framifrånvy

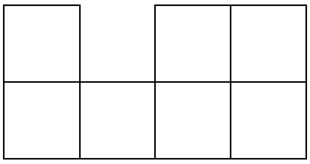
Maximum antal kuber



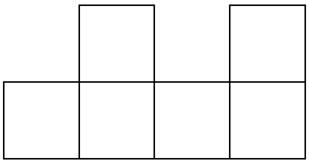
Höger sidovy

Framifrånvy

4. **Framifrånvy**



Sidovy



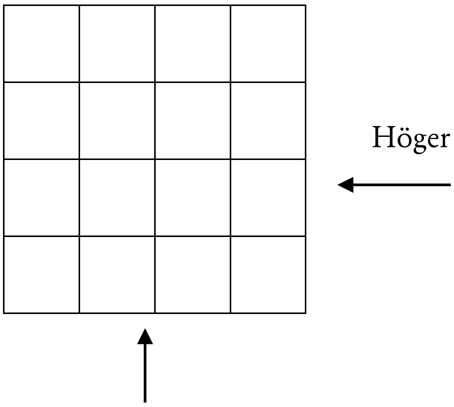
a: Antal kuber:_______

b: Minimum:________

c: Maximum:________

d: antal variationer:____

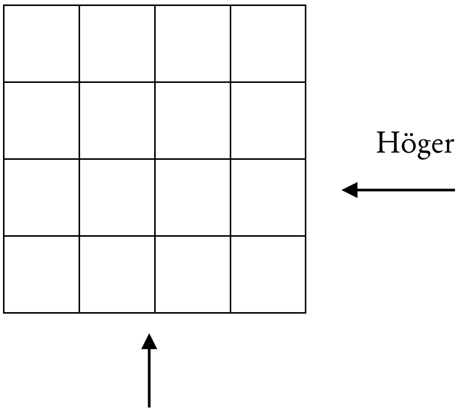
Min lösning



Höger sidovy

Framifrånvy

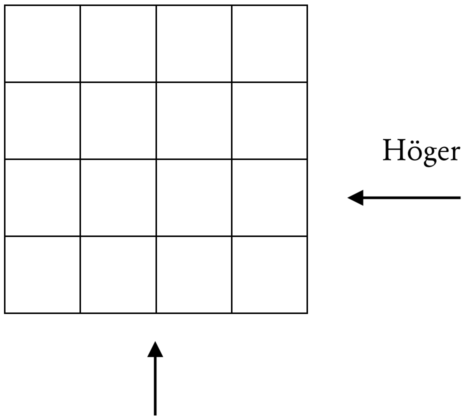
Minimum antal kuber



Höger sidovy

Framifrånvy

Maximum antal kuber



Höger sidovy

Framifrånvy

Material

Cirka 30 st småkuber per grupp av elever.

Rutat papper 1x1 cm finns att hämta på Nationellt centrum för matematik, NCM, se länk: http://ncm.gu.se/media/namnaren/npn/matematikpapper/cm_rutat.pdf

Yngre elever, eller elever med sämre finmotorik kan behöva större rutor

Rutat papper 2x2 cm finns att hämta på Nationellt centrum för matematik, NCM, se länk http://ncm.gu.se/media/namnaren/npn/matematikpapper/20mm-rutat.pdf

Programvara finns via från maths300.com licens krävs.

Genomförandet

1–3 timmar.

Men, en högstadieelev som är matematiskt särskilt begåvad behöver troligtvis inte mycket mer än 20–30 minuter. Programvaran som finns till denna uppgift erbjuder dock utmaningar på ytterligare nivåer och om eleven lockas av att ta fram antalet variationer av minimumet skulle man kunna önska att eleven sammanställer sin strategi över hur han/hon tar fram antalet variationer.

Centralt innehåll enligt lgr 11.

Åk 1–3

- Konstruktion av geometriska objekt. Skala vid enkel förstoring och förminskning.
- Vanliga lägesord för att beskriva föremåls och objekts läge i rummet.
- Symmetri, till exempel i bilder och i naturen, och hur symmetri kan konstrueras

Åk 4–6

- Konstruktion av geometriska objekt, såväl med som utan digitala verktyg. Skala och dess användning i vardagliga situationer.
- Symmetri i vardagen, i konsten och i naturen samt hur symmetri kan konstrueras.

Åk 7–9

- Avbildning och konstruktion av geometriska objekt, såväl med som utan digitala verktyg. Skala vid förminskning och förstoring av två- och tredimensionella objekt.
- Likformighet och symmetri i planet

Praktiskt genomförande

För att skapa ett sammanhang till uppgiften kan man ge ett exempel från omgivningen som kan relateras till sidvyer, en så kallad ”Storyline”. Vårt exempel är handlar om hur omgivningen kan förändras vid byggandet av en ny stadsdel, se inledningen.

Därefter påbörjade vi arbetet med uppgiften.

Dela in eleverna i grupper, 2–4 elever per grupp.

Det är bra att hjälpa eleverna med en mall att placera 1x1 cm eller 2x2 cm klossar i. Alternativt att kunna rita i. På NCMs hemsida finns ”rutmallar” att hämta, länk till dessa finns i texten.

Uppgiften består av två delar.

- Del 1 som kan göras som en inledning vid ett tillfälle.
- Del 2 som förslagsvis kan göras vid ett senare tillfälle. Del 2 består av fyra deluppgifter, en per blad. Tanken är att man ger eleverna ett blad i taget så att de tar sig tid för att reflektera över sina svar, samt att de som behöver tid på sig ska känna att de blir klara och att de som arbetar fort ska ges fler utmaningar.

Tips till läraren på genomförande.

Samla klassen – gå igenom introduktionen av del 1 tillsammans i storgrupp. Vi ger ett exempel på en gemensam introduktion här.

Introduktionen syftar till att kunna hjälpa eleverna att förstå och följa instruktioner för att transformera tal i en 2D representation till en skapa en 3D representation.

- Rita upp ett 4x4 rutsystem på tavlan, eller använd dokumentkamera eller liknande.
- Tala om att det kommer att komma många instruktioner och utmaningar, men att det första steget tas tillsammans och handlar om att följa instruktioner.

Bygg inför eller tillsammans med eleverna. Antingen kan eleverna bygga själva samtidigt som läraren bygger en modell som alla ser. Eller så bygger läraren så att alla ser ordentligt, kanske med hjälp av en eller två elever. Att använda en dokumentkamera eller annat verktyg för att visa 2D vyer av en 3D konstruktion fungerade mycket bra för oss.

- I den bakre vänstra rutan i ert rutmönster, bygg ett torn som är två klossar högt, i cellen bredvid sätter du en kloss, sedan ingen, sedan en.
- I rutmönstret som finns på tavlan fyller läraren i med talen enligt Figur 1

2	1	0	1

Figur 1 Lärarens bild på tavlan efter första instruktionen.

- Fortsätt bygga på samma sätt genom att följa mönstret i Figur 2.

2	1	0	1
1	0	3	1
1	0	2	1
1	0	0	1

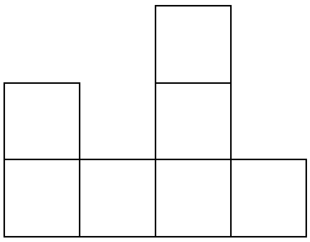
Höger sidvy

Framifrån vy

Figur 2 Mönster att följa för att bygga den första instruktionen.

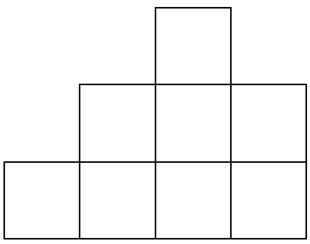
- Be eleverna att gå upp från sina stolar, ge dem följande instruktion.
    - Böj er ned, håll för ena ögat (för att minska 3D perspektivet) och titta på den byggda konstruktionen framifrån.

Det borde se ut så här...*rita på tavlan.* Säg talen 2, 1, 3, 1 högt samtidigt som du ritar varje kolumn från vänster till höger, Figur 3.



Figur 3 Framifrån vy av den första konstruktionen

Rotera nu er konstruktion så att ni tittar på den från dess högra sidvy. Då borde det se ut så här. Säg talen 1, 2, 3, 2 högt samtidigt som du ritar varje kolumn från vänster till höger, Figur 4.



Figur 4 Höger sidvy av första konstruktionen.

Efter denna introduktion kan eleverna börja arbeta vidare förslagsvis i grupper om två till fyra elever. Men kom ihåg att de särskilt begåvade eleverna ibland bör tillåtas att arbeta själva.

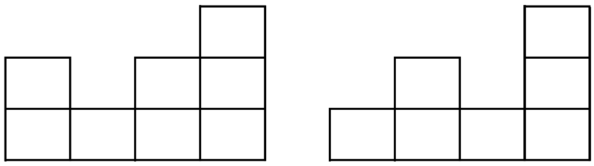
Varje grupp bör ha ungefär 30 st kuber att bygga med, de kan vara av olika färg, men ska vara av samma storlek.

1. Dela ut Del 1 av uppgiften, där eleverna ska tolka toppvyer till 3D konstruktioner. Låt dem arbeta med de fem konstruktionerna i egen takt. Samla ihop klassen på slutet av lektionen, jämför de olika framifrån och sidvyerna med varandra.
2. Del 2*, vid en andra lektion, eller om någon elev behöver bli utmanad tidigare*. Dela ut den utökade uppgiften 2, var aktiv med frågor som: Är du säker? Vad?, Vilka?, Vad händer om?, När?, Var?, Varför?, Varför inte?, Hur? Se Bilaga 9 i huvudtexten av rapporten av skolutvecklingsprojektet.
3. För både Del 1 och Del 2, tänk på att utmana de elever som klarar av uppgiften fort med att försöka rita utan att bygga. Det vill säga utmana dem att ställa hypoteser som de sedan verifierar t.ex. genom att bygga.
4. Summera? resultatet på något lämpligt sätt. Ta minst 15 minuter till detta.

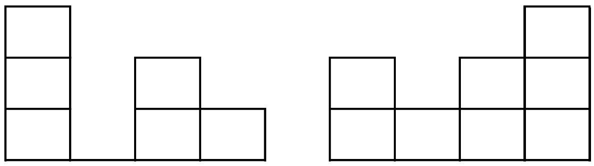
Lösningsförslag och matematiskt innehåll

Svar till Del 1

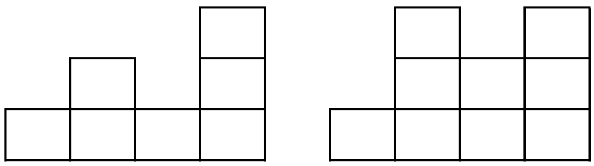
Bilder på framifrånvy (till vänster) respektive höger sidovy (till höger).



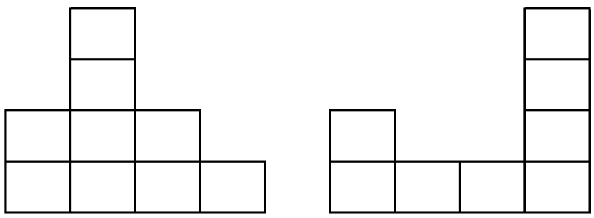
Konstruktion 1



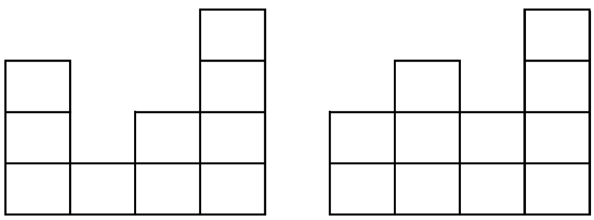
Konstruktion 2



Konstruktion 3



Konstruktion 4



Konstruktion 5

Svar till Del 2 *Vi har ej verifierat antalet möjliga variationer.*

1. Max =20, Min = 6, Variationer =4
2. Max = 21, Min = 11, Variationer = 37
3. Max = 17, Min = 7, Variationer = 5
4. Max = 22, Min = 8, Variationer = 4

Tillhörande dokument

Det finns inga tillhörande dokument till denna uppgift.

Didaktiska och pedagogiska kommentarer

Uppgiften kan vara svår att förklara på ett enkelt sätt, därför rekommenderar vi den lärare som ska genomföra uppgiften att förbereda sig grundligt, läsa igenom instruktioner, testa och bygga själv. Tänk också igenom vad som förväntas av elevernas arbete med uppgiften och vilka steg som behöver introduceras.

Uppgiften var väldigt engagerande, för att nå det matematiska djupet i uppgiften krävs mycket tid, 2–3 lektioner, både för de yngre och äldre åldrarna. Del 1 och del 2 av uppgiften är relativt olika så det fungerar bra att dela upp dem. Att hitta minsta antalet klossar i del 2 blev ett tävlingsmoment som engagerade många elever. En del lärare upptäckte att en del elever som vanligtvis inte presterade högt, hamnade bland de som presterade bäst i denna uppgift, vilket var roligt och spännande. De elever som har svårigheter med rumslig förmåga fick också svårt med denna uppgift. Det fanns dock de elever som snabbt såg lösningarna, som lärare behöver man vara alert och utmana dem vidare annars tröttnar de snabbt på att bygga och rita.

Inledning

Inledningen av uppgiften är viktig, under projektets gång införde vi samtalet om att skapa nya stadsdelar för att skapa ett sammanhang för uppgiften, vi upplevde att det gav uppgiften relevans. Uppgiften kräver koncentration och engagemang från början, vilket försvårade starten för en del elever. Genom att känna till det problemet kunde vi förebygga det i slutet av projekttiden.

Det är viktigt att genom inledningen skapa förståelse för konstruktioner i olika dimensioner. Till exempel behöver man samtala om vad en 'vy' är. Det kan man göra genom att visa bilder på olika vyer, stadsvyer, skylines etc. och genom att samtala kring hur man ska toka sådana vyer. Programvaran från maths300.com var optimal att använda för detta ändamål, men det fungerade även utan den.

Som lärare behöver man ha arbetat igenom uppgiften ordentligt i förväg, vid introduktionen är det bra att ta flera exempel att samtala kring. Visa steg för steg och prata om toppvy, sidovy och framifrånvy. Speciellt med de yngre eleverna upplevde vi att det var en fördel om de även byggde själva vid introduktionen, så att de kunde jämföra både med varandra och läraren. När man som lärare är väl förberedd och med en väl genomförd introduktion kunde alla elever hänga med från början och därefter kunde de fortsätta i sin egen takt med gott resultat. Det behövdes då enbart enklare instruktioner för att leda dem vidare till högre nivåer. Flera av lärarna i projektet använde sig av dokumentkamera, eller fotade/filmade vyerna på något sätt och visade upp dem med projektor, det var ett mycket effektivt sätt att förklara betydelsen av de olika vyerna. Användningen av att filma och visa vyerna med projektor gjorde det lätt att förklara och genomföra uppgiften även i årskurs 1.

Uppgiften är lätt att anpassa till yngre och äldre elever. Konkret material är naturligt att använda till de yngre eleverna, men även de äldre har nytta av det. De yngre eleverna behöver dock få instruktionerna muntligt, när de ska arbeta vidare själva. Byggandet lockade eleverna till samarbete även om de valde att starta själva.

Konkret material

Några elever tröttnade på, eller hade svårt för, att arbeta med konkret material, men kom heller inte vidare själva. Då finns möjligheten att använda programvaran, det kräver dock att man har licensen.

Utöver att ha tillgång till klossar upptäckte vi att många elever behövde hjälp med att placera sina klossar så att det blev ordning och reda. Vi använde de rutpapper som finns att hämta på nationellt centrum för matematik.

Vi utvecklade även de arbetsblad som hörde till ursprungsuppgiften så att de fungerade bättre för våra elever. För uppgiftens genomförande var det viktigt att läraren var förberedd och bland annat hade kopierat allt material i förväg så att det var klart för de som behövde utmanas även vid första tillfället.

En del elever såg tidigt hur de skulle rita och slutade bygga, medan vissa elever byggde även om de såg hur det skulle vara. Åtminstone i det sista fallet kan man som lärare utmana eleven till att i alla fall först ställa en hypotes som sedan kan bekräftas genom att bygga.

Upplevelser

Eleverna upplevde uppgiften som svår men rolig, de arbetade också i väldigt olika takt med uppgiften. För de flesta lärare fungerade uppgiften väldigt väl och skapade stort engagemang bland eleverna. Speciellt värt att nämna är elevernas arbete med del 2 och hur lärarens fråga angående om de är säkra på sina slutsatser triggade dem till positiv frustration och skapade motivation. Det vill säga frågan om eleverna var säkra på att de hittat det minsta respektive största antalet klossar de kunde bygga konstruktionen med.

Någon lärare nämner att uppgiften lockade några elever som vanligtvis var svåra att få engagerade till att bli ivriga och fastna i uppgiften. En annan lärare nämner att uppgiften kan vara för abstrakt för de yngsta eleverna, årskurs 1, på grund av att de hade svårt att byta perspektiv. Men samma lärare nämner också att uppgiften fungerade bra för de särskilt begåvade eleverna samt att den gav möjlighet att arbeta ihop med en annan elev enskilt under mentorstid.

Uppgiften verkar vid första anblicken vara en praktisk ”att göra” uppgift, men i utvecklingen av uppgiften lyfts det matematiska resonemanget och även kombinatorik. Elever som lärt sig sannolikhetsbegrepp spekulerade om möjliga utfall, antalet gynnsamma respektive icke-möjliga lösningar. Det var en uppgift som var kreativ och utmanande för de som lockades av uppgiftens utmaning. De kom fram till olika svar och behövde argumentera och berätta för varandra hur de tänkte för att försöka komma fram till vem det var som hade rätt. En uppgift som innehåller förvånansvärt mycket matematik.

En jättebra uppgift där alla elever kan arbeta framåt i sin egen takt. Det var lätt att avancera i uppgiften för de som behöver mer utmaning.

Donkarna (åk 1–3)

Uppgiften är inspirerad av en uppgift i Multimatte, Problemlösning B (Olsson m.fl., 1999).

Donkarna är en av de friare uppgifterna vi utvecklat i projektet. Genom uppgiften utmanas eleverna att formulera samband, dessutom tränas eleverna i att använda och förstå variabler. Uppgiften erbjuder också möjlighet att diskutera matematisk logik, där till exempel orden *'och'* alternativt *'eller'* kan göra stor skillnad i hur ett problem uppfattas.

Det finns begrepp i uppgiften som behöver redas ut med eleverna, till exempel *egenskaper.*

Vi ser stora möjligheter i att samarbeta med de estetiska ämnena genom uppgiften. Till exempel kan Donkar skapas i olika material och/eller genom att måla dem. Varje elev har full rätt att kalla sin skapelse en Donk, bara hon eller han kan ange vilka egenskaper som gör att skapelsen är en Donk. Man kan göra uppgiften till ett ämnesövergripande projekt och avsluta det till exempel med en "Donkutställning". Att arbeta med resultat som ska visas för en riktig publik är något som poängteras som viktigt till exempel för särskilt begåvade elever. Vi tror att det kan vara viktigt och roligt även för de andra eleverna.

Inom projektet har vi inte använt oss av digitala verktyg för att arbeta med uppgiften. Vi ser dock att det finns möjligheter att använda digitala verktyg för att skapa Donkar, till exempel Minecraft, GeoGebra eller liknande.

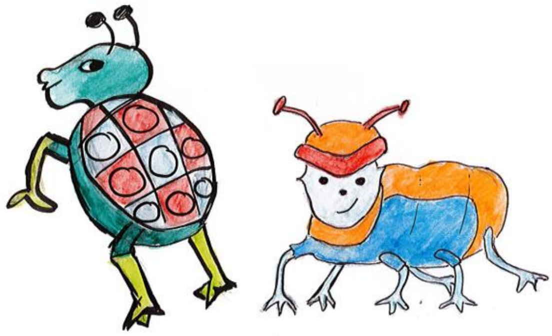
Uppgiften finns även presenterad i Nämnaren, se

Mellroth, E. & Sjöö, D. (2018). Finns det donkar i Karlstad? Nämnaren 2018:1, 28–31.
Mellroth, E. & Sjöö, D. (2018). Donkarna. Uppslaget. Nämnaren, 2018:1, 32–33

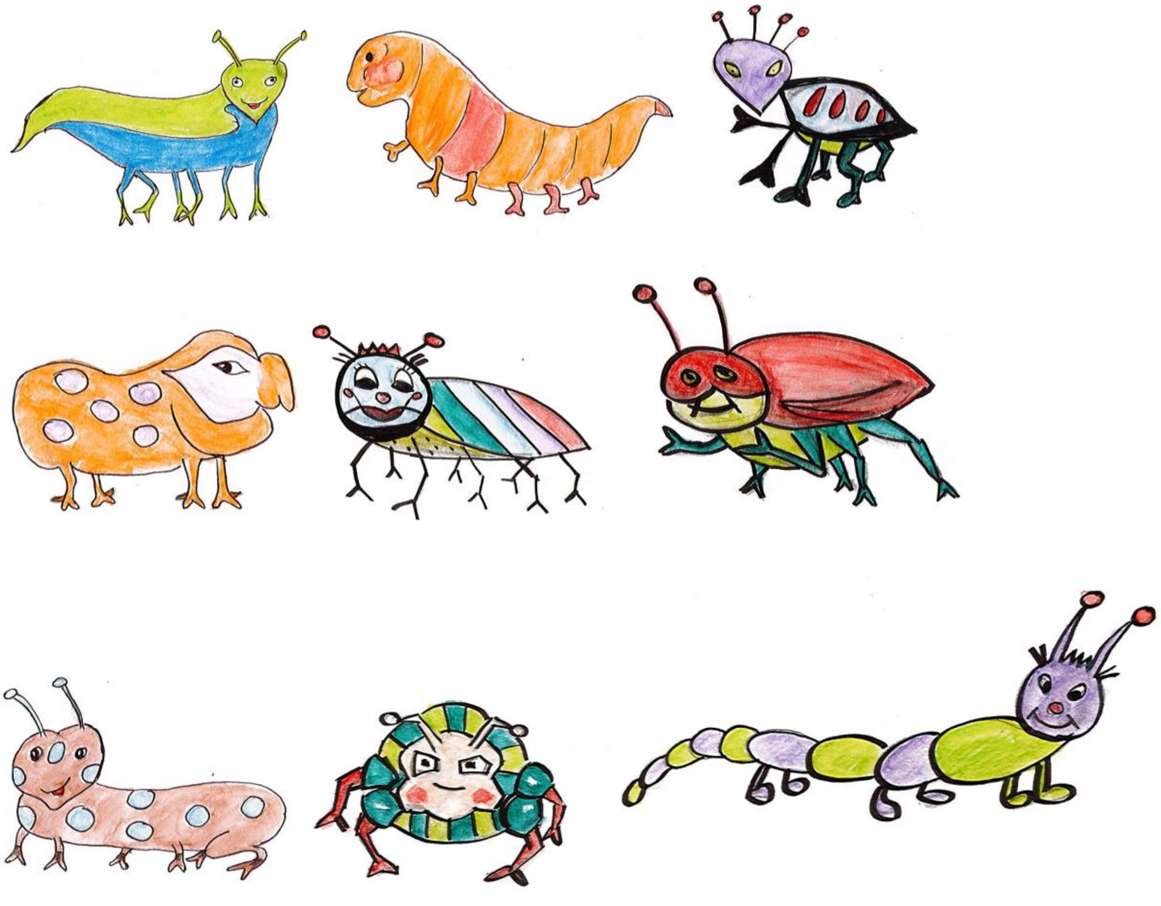
Uppgiftsformulering

De här figurerna är donkar.

De här figurerna är INTE donkar.



Vilka av de här figurerna är donkar?



Skriv ned vilka egenskaper du använde för att skilja donkarna från de andra figurerna. Visa dokumentationen för din lärare.

Utökning

Använd din fantasi och hitta på helt nya egenskaper till en alldeles egen grupp av figurer. Vad kallas din grupp av figurer och vad skiljer dem från andra figurer? Dokumentera de nya egenskaperna.

Konstruera eller rita en eller flera av dina nyskapade figurer.

Material

- Bild på Donkar och andra figurer.
- Papper och färgpennor.
- Digital lösning, eventuellt Minecraft eller liknande för att skapa Donkar.

Genomförande

Tid: Två lektioner eller en längre period.

- Det tar ca en lektion att introducera uppgiften och påbörja arbetet med grundformuleringen
- Ytterligare en lektion krävs för en fördjupning och konstruktion av egna donkar.
- Arbetar man ämnesöverskridande och i projekt, kan man arbeta med uppgiften under en längre tid och återkomma till den lite då och då under projekttidens gång.

Observera att vissa begrepp behöver förklaras för eleverna när uppgiften introduceras, gå igenom detta i helklass till exempel genom att visa bilder eller figurer. Gärna genom att vara lite provokativ på ett skämtsamt sätt, exempelvis:

- ➢ Läraren håller upp en leksakskossa med horn.
- ➢ Eleverna föreslår att en egenskap för att vara en kossa är att djuret har horn.
- ➢ Läraren håller då upp en älgfigur, med horn, och frågar: Är älgen också en kossa?

Det är också viktigt att läraren ger exempel på hur eleverna kan dokumentera egenskaperna för sina egna exempel, samt att lyfta upp skillnaden mellan att använda orden *'och'* respektive *'eller'*. Exempelvis kan man ge ett exempel på tavlan.

Välj en figur som man bestämmer ska vara en Donk. Anteckna till exempel:

- 2 antenner *och* 3 ben *och* 4 prickar

Diskutera med eleverna vad skillnaden blir om man istället säger

- 2 antenner *eller* 3 ben *och* 4 prickar

Blir det till exempel någon figur som är Donk bara vid ett av alternativen? Varför?

För den utökade uppgiften har vi konstruerat en mall som kan användas, vi har valt att skriva ”Skapat av:” istället för ”Namn:” därför att vi vill lyfta upp för eleverna att det är de själva som konstruerar uppgiften, se Tillhörande dokument.

Detta är en uppgift där eleverna kan tillåtas arbeta enskilt eller i par, allt efter vad läraren ser passar respektive elev bäst. Viktigt att tillägga är att uppgiften speciellt lämpar sig för att låta de särskilt begåvade eleverna få arbeta enskilt och använda sin kreativitet fritt, vilket de enligt Rogers (2007) ibland behöver ges möjlighet till.

För att hjälpa eleverna att fördjupa sina kunskaper inom matematiken ger vi några exempel på frågor man kan ställa till eleverna när de arbetar med uppgiften. Frågorna är förutom att fördjupa den matematiska kunskapen också tänkta att stimulera elevernas högre tänkande enligt Blooms reviderade taxonomi (Anderson m.fl., 2001) Naturligtvis väljs den fråga, eller de frågor, som passar bäst för stunden i mötet med respektive elev.

- Vad händer om du byter ut ett *och* i din dokumentation mot ordet *eller*?
- Vad händer om du byter ut alla dina *och* mot ordet *eller*?
- Stämmer de dokumenterade egenskaperna på en Donk med de Donkar du har konstruerat?
- Kan en Donk ha egenskaper som inte syns?

Lösningsförslag och matematiskt innehåll

Det matematiska innehållet har vi kopplat till de centrala innehållen som finns i ämnet matematik på de olika nivåerna, åk 1 – åk 6 i Lgr11.

- Hur (enkla, för åk 1-3) mönster i talföljder och geometriska mönster kan konstrueras, beskrivas och uttryckas.
- Matematisk formulering av frågeställningar utifrån enkla vardagliga situationer.

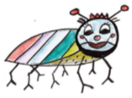
Eftersom var och en av eleverna har möjlighet att skapa sina egna Donkar så är det omöjligt att ge ett ”facit” på uppgiften. Vilket troligtvis är en av orsakerna till varför uppgiften är så genialisk och fungerar så bra för de flesta elever oavsett om de är svaga eller särskilt begåvade. Vi ger ett exempel på ett möjligt sätt att arbeta med uppgiften.

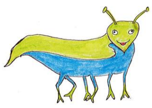
Egenskaper för en Donk

En Donk har sex ben *och* två tår på varje fot *och* lila färg på ryggen

Detta leder till att:

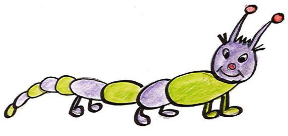
Denna  kan med säkerhet sägas uppfylla alla krav.

Denna figur  kan anses vara en Donk, den har åtta ben och därmed även sex ben.

Följande  är inte en Donk därför att den saknar lila färg på ryggen.

Figuren närmast ovanför hade varit en Donk, om det sista *och:et* i egenskaper för en Donk hade ändrats till ett *eller*. Det vill säga om egenskaperna för en Donk hade varit:

En Donk har sex ben *och* två tår på varje fot *eller* lila färg på ryggen.

Följande  kan också vara en Donk, det kan vara så att figuren har skor på sig aå att man inte ser hur många tår den har. Den uppfyller ’sex ben *och* lila färg på ryggen’.

Även denna  skulle kunna vara en Donk – det kan ju gömma sig ett par ben till med två tår på varje fot samt en lila fläck på ryggen – fast att vi inte kan se det på bilden.

Med figurer i 3D kan man naturligtvis lättare avgöra om en figur är en Donk eller ej utifrån de (av eleven) uppsatta egenskaperna.

Nästa steg är att undersöka hur resultatet ändras när man byter ut order *och* mot *eller*. Kan man göra så att alla blir Donkar?

Genom att testa på en kompis kan man undersöka om man skrivit ned egenskaperna för en Donk tillräckligt tydligt.

Egenskaper som inte syns kan vara:

- Antal tår som en Donk med skor har.
- Hår under en mössa.
- Antenner under en keps.
- Prickar, respektive färg, på den sida kroppen som inte syns.

Tillhörande dokument

Kan du lista ut vilka figurer som är ____________________?

Skapat av:______________________________

Didaktiska och pedagogiska kommentarer

Det är lätt att tro att denna uppgift är enkel och att eleverna blir självgående. För att den ska bli det krävs dock att begrepp som kan vara svåra reds ut innan själva starten. Speciellt gäller detta begreppet egenskaper. Vi ger ett förslag under rubriken 'Genomförande' hur man kan arbeta för att skapa förståelse för begreppet. Ett alternativt sätt kan vara att arbeta med begreppet i andra sammanhang under lektioner innan just denna uppgift ska genomföras.

Vissa elever hittar på väldigt många egenskaper och/eller väldigt långsökta egenskaper. Detta gjorde att det blev svårt för en del elever att förstå varför en figur var en Donk och en annan inte. Det går eventuellt att begränsa eleverna och säga att de ska bestämma maximalt två till fyra egenskaper.

Eleverna tyckte det var roligt att hitta på egna Donkar. Med den öppenhet som uppgiften har blir elevernas lösningar och arbetssätt väldigt olika. Som lärare kan man samla på sig både goda och mindre goda exempel att lyfta vid en avslutande diskussion kring vilka egenskaper som fungerar eller inte fungerar.

Vi rekommenderar att använda minst två pass till uppgiften, där eleverna får skapa egna figurer under det andra passet. Det andra passet inleddes med en återkoppling till begreppet egenskaper relaterat till de Donkar som lyfts vid det första passet.

En av lärarna i projektet introducerade andra passet ihop med en kollega (man kan eventuellt ta en elev) som direkt fick lämna rummet. Läraren visade eleverna vad de själva skulle få göra genom ett exempel med en ny samling figurer, skapade med mycket enkla och tydliga medel. I detta fall användes en mall, se Elevdokument, uppdragen på A3. Figurer kallades för "Fjonkar" och hade två egenskaper i kombination (där ordet *och* användes), med på mallen fanns också några figurer som inte var Fjonkar.

Lärarens kollega fick därefter komma in och försöka lista ut vilka egenskaper som gällde för en Fjonk.

Därefter fick eleverna samma mall för att skapa sina egna speciella figurer med särskilda egenskaper. Begränsa gärna eleverna. Egenskaperna får gärna vara geniala, men inte för många, två eller tre är tillräckligt.

Som avslutning fick eleverna ordna en utställning där de fick titta på varandras figurer och försöka lista ut vilka egenskaper de hade. Halva gruppen fick först promenera runt medan halva gruppen stod kvar vid sina figurer. Därefter bytte de.

Det andra passet upplevdes som väldigt stimulerande för alla elever, och även för läraren. Det var tydligt att även de särskilt begåvade eleverna gillade uppgiften och ansträngde sig för att göra ett bra arbete. Att ha utställningen som ett mål motiverade eleverna. Vi tror, bland annat genom denna erfarenhet, att uppgiften skulle fungera väl för ämnesövergripande arbete till exempel i bilden eller tekniken.

Referenser och källor

Anderson, L. W m.fl.. (2001). *A taxonomy for learning, teaching, and assessing: a revision of Bloom's taxonomy of educational objectives*. New York, NY: Longman.

Olsson, I., Forsbäck, M. & Mårtensson, A. (1999). *Multimatte: Problemlösning B*. Natur & Kultur Läromedel.

Spökhuset (åk 1–3)

Problemet handlar om spökhus. Antalet spöken som bor på olika våningar varierar enligt vissa regler.

I arbetet med uppgiften tränas eleverna dels på begrepp som till exempel dubbelt, och i utökningen av problemet tredubbelt o.s.v.

Problemet uppskattades av alla elever oavsett deras matematiska förmåga och den gav utmaning även till elever med särskild begåvning. Detta är alltså ett av de problem som väl uppfyller projektets syfte.

Uppgiftsformulering - Spökhuset

1) Spökhuset har fyra våningar. Högst upp bor det fyra spöken. På varje våning bor det dubbelt så många som på våningen ovanför. Hur många spöken bor i huset?

Använd pappret med spökhusmallen, eller rita ett eget spökhus.

Hämta plockmaterial, om du vill för att använda som spöken.

Sätt ut rätt antal spöken på rätt våning. Du kan pröva dig fram.

Utökning

2) Hur många spöken bor i huset om det har fem våningar? Sex våningar?

3) Hur många spöken bor i huset om det bor 5, 6, 7 spöken på översta våningen?

4) Hur blir det om antalet spöken tredubblas, fyrdubblas per våning?

5) Kan du formulera en formel som fungerar oavsett antal våningar? Eller hitta på en egen uppgift där antalet spöken eller andra figurer förändras på ett liknande sätt?

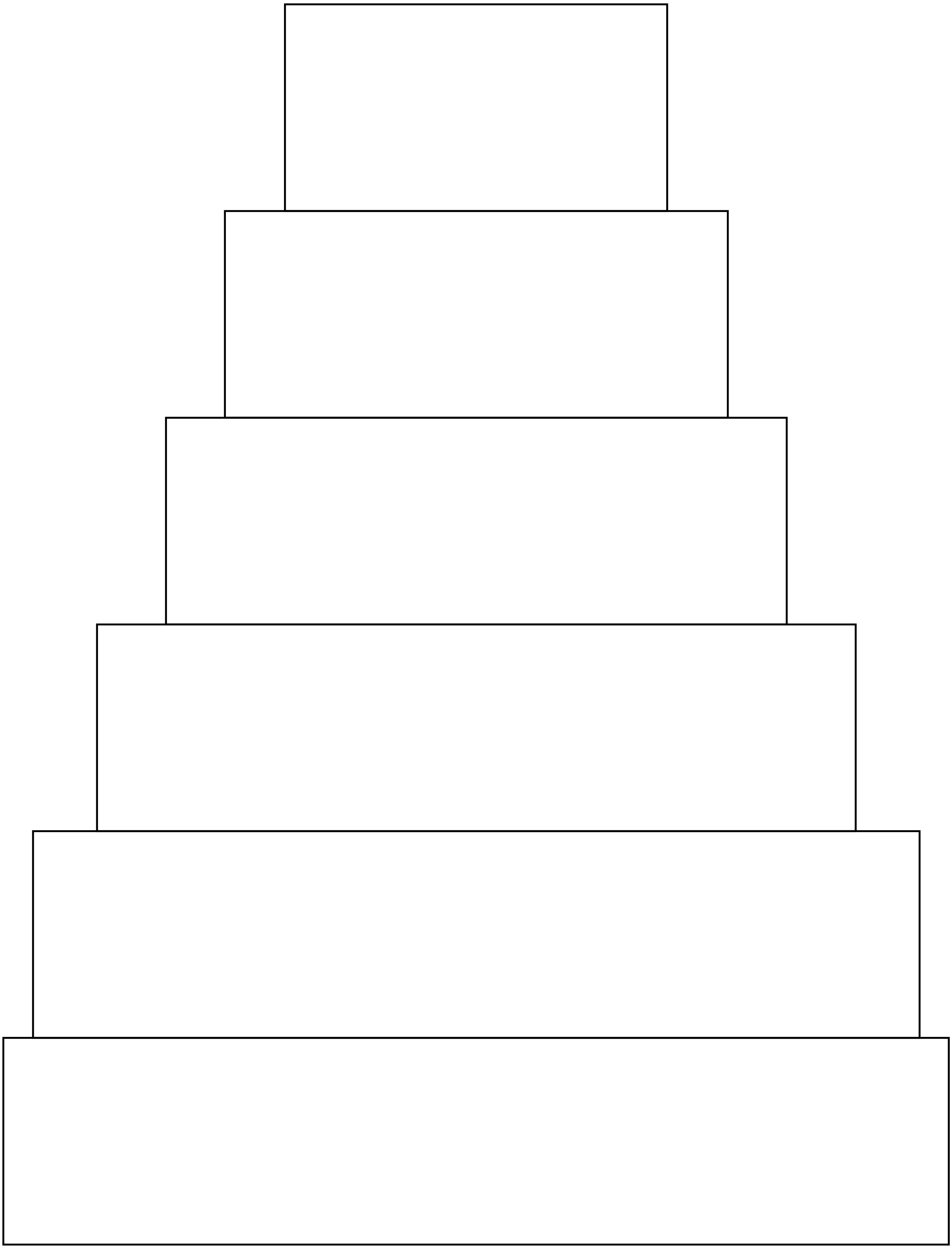
Material

- Plockmaterial som symboliserar spöken, t.ex. legobitar, gem etc. Varje elevgrupp bör ha minst 30 st ”spöken”.
- Papper med flervånings-spökhus, se exempel i Tillhörande dokument.
- Miniräknare.

Genomförandet

Tid: 1 – 1,5 timmar

Tillhörande dokument - Spökhus



Lösningsförslag och matematiskt innehåll

Centralt innehåll åk 1–3 enligt Lgr11.

- Naturliga tal och deras egenskaper samt hur talen kan delas upp och hur de kan användas för att ange antal och ordning.
- De fyra räknesättens egenskaper och samband samt användning i olika situationer.
- Centrala metoder för beräkningar med naturliga tal, vid huvudräkning och överslagsräkning samt vid beräkningar med skriftliga metoder och digitala verktyg. Metodernas användning i olika situationer
- Hur enkla mönster i talföljder och enkla geometriska mönster kan konstrueras, beskrivas och uttryckas.
- Olika proportionella samband, däribland dubbelt och hälften.
- Strategier för matematisk problemlösning i enkla situationer.

Lösningar

Det finns naturligtvis oändligt många sätt att lösa problemet på, i denna rapport redovisas än så länge enbart svar, i de fall det finns svar.

Tabell 1 Svar till uppgift 1)

Våning	Antal spöken
4	4
3	8
2	16
1	32
Antal spöken som bor i huset	60

Tabell 2 Svar och förslag till lösning till uppgift 2)

Våning	Antal spöken
5	$4 = 2^0 * 4$
4	$8 = 2 * 4 = 2^1 * 4$
3	$16 = 2*8 = 2*2*4 = 2^2 * 4$
2	$32 = 2*16 = 2*2*2*4 = 2^3 * 4$
1	$64 = 2*32 = 2*2*2*2*4 = 2^4 * 4$
Antal spöken som bor i huset	$124 = 4 + 8 + 16 + 32 + 64 =$ $= (2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4)*4$

Vi landar alltså på en geometrisk serie, vilket gör att uppgiften i sin enkelhet kan tas upp till gymnasiematematikens centrala innehåll. Det är dock inte något som vare sig eleverna i åk 1–3, eller deras lärare, kan förväntas känna igen. Men även om det är otroligt så kanske någon kanske ändå lyckas komma fram till formeln:

För ett femvåningshus, med fyra spöken på översta våningen och antalet spöken dubbleras för varje våning under blir det totala antalet spöken $S = \frac{4(2^5-1)}{2-1}$

Detta blir den generella formeln för antalet spöken, S, i ett hus med *n* våningar, där det bor *y* spöken på översta våningen, med regeln att det på varje våning bor *x* gånger så många spöken som på våningen över.

$$S = y\frac{x^n - 1}{x - 1}$$

Elever i lågstadieåldern bör man lyssna noga på, det är mer troligt att de muntligt eller med ett ordbaserat skriftligt resonemang ger generella slutsatser.

T.ex. kan en lågstadieelev formulera något liknande:

Om det är fem våningar beräknas antalet spöken i huset genom att man tar:

- Antalet spöken högst upp plus
- 2 gånger antalet spöken högst plus
- 4 gånger antalet spöken högst plus
- 8 gånger antalet spöken högst plus
- 16 gånger antalet spöken högst

Om det är fem våningar blir det fem additioner.

Om man tredubblar så byter man ut 2, 4, 8, och 16 i multiplikationen till 3, 9, 27, och 81 o.s.v.

Tabell 3 Svar till några olika varianter av höjd på spökhus, olika starttal och olika faktor på ökningen per våning.

Antal spöken högst upp	Antal våningar	Ökning av spöken, x	Totalt antal spöken i huset
4	4	2	60
5	4	2	75
6	4	2	90
7	4	2	105
4	5	2	124
5	5	2	155
6	5	2	186
7	5	2	217
4	4	3	160
5	4	3	200
6	4	3	240
7	4	3	280
4	5	3	484
5	5	3	605
6	5	3	726
7	5	3	847

Didaktiska och pedagogiska kommentarer

Uppgiften var mycket uppskattad bland eleverna oavsett deras matematiska förmåga.

Förkunskap som eleverna bör ha och som kan vara bra att repetera innan uppgiften genomförs är:

- Våningar
- Dubbelt

Begreppen kan till exempel diskuteras i helklass genom att visa ett spökslott med flera våningar via projektor eller annan stor bild. Genom att peka på den stora bilden kan man berätta ”Här bor fyra spöken, i våningen under bor dubbelt så många spöken o.s.v.”

Att använda färdigt spökhus och plockmaterial - eller att låta eleverna konstruera dessa själva?

Naturligtvis kommer det finnas elever som uppskattar att få färdiga spökhus, men också de som helst vill göra sina egna. En av lärarna som genomförde uppgiften i projektet anser att det är en fördel om eleverna själva konstruerar sina spökhus. Hon menar att det är viktigt att man då ger exempel på hur spökhusen kan se ut. Många elever tyckte det var kul att rita och måla själva och det blev många vackra spökhus. Det tar tid, men hon tyckte det var värt det.

En annan lärare som genomförde uppgiften ansåg att det var mycket bra att ha färdiga spökhus och mini-spöken att dela ut, men hon påpekade att några elever föredrog att måla egna slott.

I de flesta klasser fick eleverna välja om de ville rita spöken eller lägga ut småspöken med hjälp av plockmaterial, till exempel ändar på bomullstopps.

Elevernas arbete

Alla elever förstod, och hann, genomföra grunduppgiften på en lektion och några gick vidare och jobbade med spökhus som hade fler våningar.

De utökade frågorna gav elever som behöver utmanas en möjlighet till att utveckla sin egen förmåga, genom att de kräver ett ”tänkande på högre nivå”.

Den utökade frågorna 3) och 4) passar båda bra för de yngre eleverna, uppgift 3) arbetar dock enbart med begreppet dubbel, men med en ökning på talen. Genom uppgift 4) leds eleverna vidare till nya begrepp, tredubbla, fyrdubbla etc som kan kopplas till multiplikationstabellen.

De elever som lärarna genomförde uppgiften med kunde själva räkna ut vad dubbelt så mycket är - om talet man utgår från inte är så stort. Så småningom upptäckte några att antalet spöken per våning ökar enligt ett mönster.

För denna uppgift rekommenderas EPA-metoden, lärarna upplevde att metoden ofta resulterade i att de flesta eleverna behöll engagemang och fokus under lektionen. Metoden bidrar även till att eleverna kan ta och ge tips från/till sina kamrater, på så sätt så att de tränas i sitt högre tänkande genom samarbete/kommunikation, analys, utvärdering och kreativitet.

Digitala hjälpmedel

Elever med matematiksvårigheter fick stöd till att klara av uppgiften genom att använda miniräknare. På detta sätt lärde de sig vilket räknesätt och vilken strategi som fungerade för att arbeta med uppgiften.

Referenser och källor

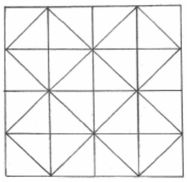
Olsson, I., Forsbäck, M. & Mårtensson, A. (1999). *Multimatte: Problemlösning B*. Natur & Kultur Läromedel.

Måla del av mönster (åk 1–3)

Måla del av mönster är en uppgift som vi utvecklat från PiXel matematik 2B extrabok (Alseth, Arnås, Kirkegaard, Rösseland, 2015). I vår version av uppgiften stimuleras elevernas kreativitet och det finns en öppning i uppgiften som kan leda till insikten om hissnande många möjliga lösningar.

Ett problem med ursprungsformuleringen var, som vi såg det, att eleverna blev styrda i sina konstruktioner genom att uppmaningar om hur de skulle måla var placerade i förhållande till kvadraten med trianglar.

Ungefär så här såg formuleringen av uppgiften ut i PiXel matematik 2B Extraboken.

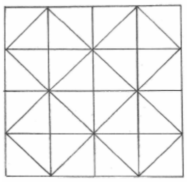


¼ av rutorna ska vara gula.

¼ av rutorna ska vara röda.

½ av rutorna ska vara gröna

I PiXels version fanns även en utökning av problemet:



¼ av rutorna ska vara blå.

¼ av rutorna ska vara gröna.

¼ av rutorna ska vara röda.

¼ av rutorna ska vara gula.

I vår utvecklade version av uppgiften får eleverna i uppgift att måla olika delar av mönstret i en kvadrat, som delas ut till eleverna på separat papper. I huvudsak delas uppgiftsformuleringarna ut genom muntliga instruktioner, något vi upplevde fungerade bra för åk 1–3 eleverna.

För att kunna lösa uppgifterna behöver eleverna ha förkunskaper om:

- De geometriska formerna kvadrat och triangel,
- Bråkdelar, en halv och en fjärdedel.

Grunduppgiften börjar med att eleverna får en kvadrat med ett mönster av 32 trianglar och efterföljande instruktioner, som bör delas ut en i taget till eleverna.

Uppgiftsformulering

Dela ut kvadrater med de 32 trianglarna, en till varje elev och ha extra kvadrater redo, se Tillhörande dokument.

Ge instruktionerna, en i taget, muntligt till eleverna.

Placera gärna eleverna i grupper för att undvika att någon/några elever blir sittande länge och väntar på instruktioner.

1. Måla hälften av kvadraten grön, måla en fjärdedel gul och måla en fjärdedel röd.

2. Räkna trianglar:

    a) Hur många små trianglar kan du/ni se i kvadraten totalt?

    b) Hur stor del av de små trianglarna ryms i hälften av kvadraten?

    c) Hur stor del av de små trianglarna ryms i en fjärdedel av kvadraten?

Utökning

3. Måla kvadraten på två andra sätt med hälften grön färg, en fjärdedel rött och en fjärdedel gult.

4. Måla i andra färger och med andra bråkdelar.

5. På hur många olika sätt kan man måla hälften av de små trianglarna gröna, en fjärdedel röda och en fjärdedel gula? Kan du skapa en liknande uppgift som är enklare att lösa?

Material

Färgpennor eller kritor.

Färdiga kvadrater med 32 st förmarkerade trianglar, se Tillhörande dokument.

Färdiga tomma kvadrater, se Tillhörande dokument.

Genomförandet

Tid: 1–2 lektioner, för en del elever tar det väldigt lång tid att måla, varför det kan vara bra att avsätta 2 lektioner så att alla elever når det matematiska innehållet.

I vårt projekt lät de flesta lärarna eleverna arbeta i par eller mindre grupper, någon använde även EPA metoden.

Att ge instruktionerna muntligt var något som lärarna tyckte fungerade bra både för eleverna och för dem själva. Naturligtvis kan man välja att ge dem skriftligt, vi vill poängtera att vi anser det viktigt att inte ge alla instruktioner på en gång. Det fanns flera anledningar till det, bland annat för att inte stressa elever som tar längre tid på sig, men också för att få elever som arbetar snabbt att stanna upp och reflektera över vad de gjort. Dessutom gav de muntliga instruktionerna större möjlighet att som lärare uppmuntra eleverna att utifrån sina egna förmågor ta sig vidare – tävlingsmomentet minskade eftersom det blev svårare för eleverna att jämföra med varandra hur långt de kommit.

Lösningsförslag och matematiskt innehåll

Centralt innehåll i lgr 11 (åk 1–3).

- Del av helhet och del av antal. Hur delarna kan benämnas och uttryckas som enkla bråk samt hur enkla bråk förhåller sig till naturliga tal.
- Naturliga tal och enkla tal i bråkform och deras användning i vardagliga situationer.

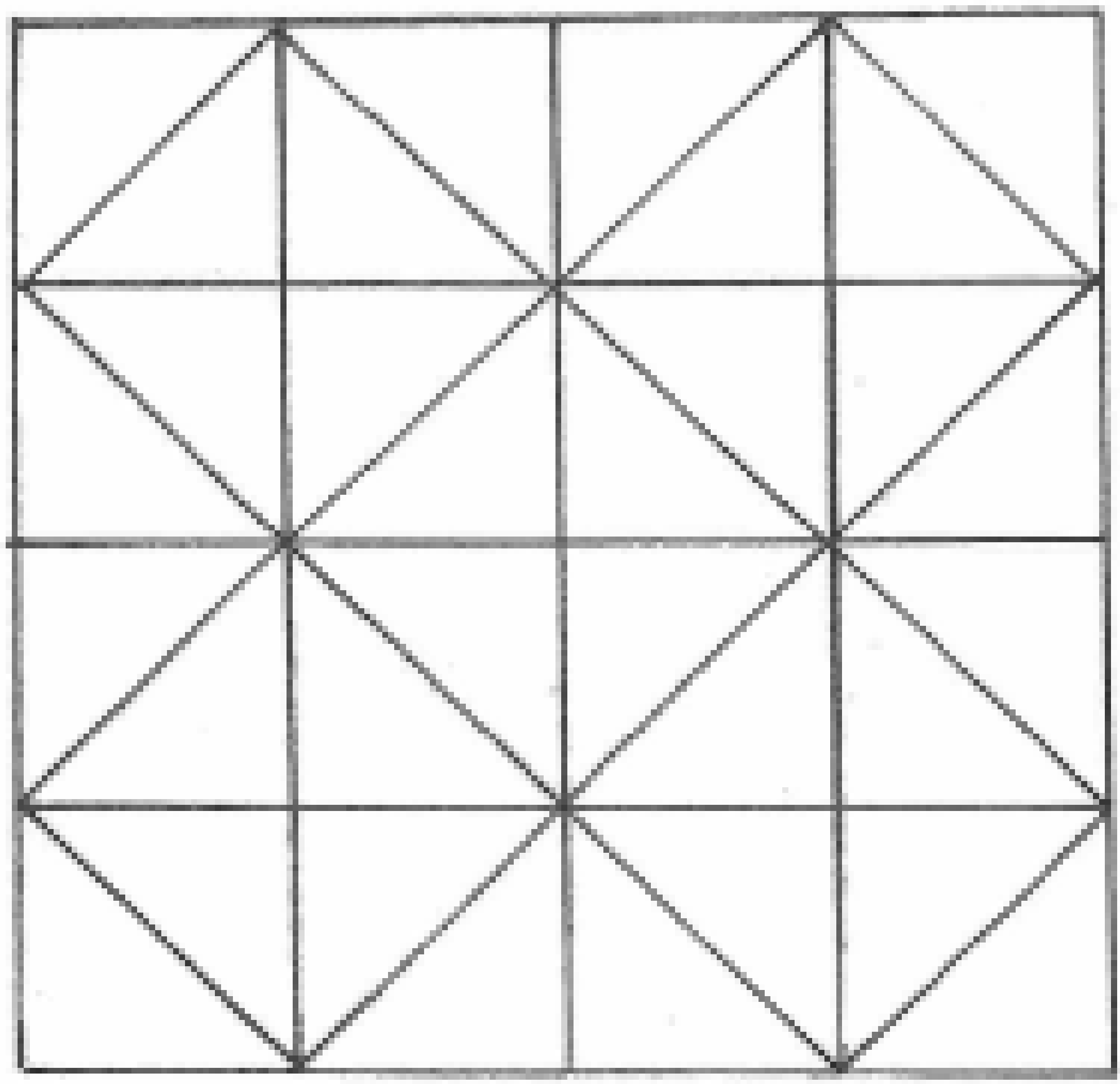
Lösningsförslag

Det finns näst intill ett oändligt antal möjliga lösningar på denna uppgift.

För att den undervisande läraren ska kunna avgöra om en elev har gett en korrekt eller felaktig lösning rekommenderas läraren att räkna antalet trianglar i grönt, gult eller vilken färg som nu använts.

Om eleven har målat utan att använda hela trianglar så lyckönskar vi läraren till möjligheten att få ta del av den elevens matematiska resonemang. Kanske blir det en möjlighet att låta den/de eleverna att redovisa inför sina klasskompisar.

Tillhörande dokument



Didaktiska och pedagogiska kommentarer

För att kunna arbeta med uppgiften behöver eleverna ha förförståelse av bråk, åtminstone kring halva och fjärdedelar. Vi rekommenderar att man introducerar uppgiften i helklass och diskuterar dessa begrepp. Någon lärare valde att ta ett lektionspass till att introducera och diskutera olika bråkdelar, för att sedan låta eleverna arbeta med själva uppgiften vid nästa lektionspass.

Det är bra om de elever som kan läsa har tillgång till instruktionerna eftersom några av deluppgifterna går väldigt fort att göra för en del.

Den sista utökade frågan har ett näst intill oändligt antal lösningar, det är viktigt att elevernas intresse och lust får styra hur länge de arbetar med den. Man kan sträva efter att eleverna ska nå förståelse för att det finns väldigt många lösningar. För den nyfikne eleven kan man diskutera om det blir skillnad om man fixerar mönstret så att det har en över och underdel respektive höger och vänstersida. Man kan även introducera ett mindre komplext problem för att hjälpa dem hitta strukturen i hur man kan beräkna antalet möjligheter. Uppgiften Djurkombinatorik kan t.ex. användas till det.

Vår erfarenhet är att detta är en uppgift där eleverna arbetar i väldigt olika takt. En del hinner med både grunduppgiften och den utökade uppgiften. Som lärare får man vara uppmärksam och uppmuntra dem som kommit långt, samt uppmana dem till reflektion, samtidigt som man får vara aktiv och berömma de som arbetar långsamt för deras prestationer. Det finns en risk för att några elever ”fastnar” i att måla i denna uppgift, det kan man hjälpa eleverna med genom att t.ex. säga att de kan markera trianglarnas färg med ett färgstreck eller färgkryss istället för att måla hela. Så att matematiken kommer i fokus.

Referenser och källor

Alseth, B. och Rösseland, M. (2015). *PiXel 2B: Extrabok*. Natur & Kultur Läromedel.

Djurkombinatorik (åk 1–3)

En konkret uppgift som är medryckande och fungerar även i en grupp av yngre barn.

Denna uppgift är inspirerad av en uppgift från Multimatte, Problemlösning B (Olsson m.fl., 1999).

En skillnad jämfört med ursprungsuppgiften är att vi aktivt har valt att införa matematiska ord som kombinatorik, kombinationer och utfall.

Vi har förändrat uppgiften så att den har blivit mer strukturerad, det vill säga tvärt emot jämfört med de flesta av de andra uppgifterna. Under uppgiftens utveckling diskuterades det att inte använda konkret material, men vi valde att ha det bland annat på grund av att leda eleverna att fokusera på matematiken istället för att rita.

Genom att strukturera upp denna uppgiften har bland annat steget in i uppgiften sänkts. Detta för att underlätta uppgiftens ingång det vill säga vi har fokuserat på Sheffields första kriterium för en rikt lärande uppgift, något vi genom projektet upptäckte är väsentligt för att uppgiften ska kunna fungera i helklass.

Genom att uppgiften har blivit mer strukturerad får läraren även hjälp att hjälpa även de elever som arbetar snabbt eller är matematiskt särskilt begåvade att komma till ett mer matematiskt djup.

Uppgiftsformulering - Djurkombinatorik

Du har fått fyra kort som föreställer två djur. Två av korten är djurens överdel, två av korten är djurens underdel.

1. Hur många djurkombinationer kan du göra genom att kombinera fyra kort?

Dokumentera dina resultat.

2. Hur många utfall får du om du har sex/åtta/tio kort istället?

3. Kan du hitta något mönster i uppgiften?

Utökning

4. När kan du ha nytta av kombinatorik, det vill säga räkna ut hur många olika valmöjligheter som finns, i din vardag?

5. Tänk om varje djur var delat i tre delar, huvud, mage, ben, hur många kombinationer av konstiga djur kan man göra?

Om man utgår från

   a. Två hela djur (6 kort)

   b. Tre hela djur (9 kort)

   c. Fyra hela djur (12 kort)

   d. o.s.v.

6. Kan du hitta på en liknande uppgift som du själv och en klasskamrat kan lösa?

Material

Djurkort, halvor respektive tredjedelar, se Tillhörande dokument.

Tabell för att samla resultat i, se Tillhörande dokument.

Genomförandet

1–2 lektioner, eventuellt kan man arbeta en lektion och använda nästa lektion till att följa upp resultaten på.

Vid genomgången av uppgiften behöver man förklara orden *kombinera, utfall* och *kombinatorik*. Förklaringen kan göras genom att t.ex. prata om kombinationer av klädesplagg.

Låt eleverna arbeta ensamma, parvis eller i grupp.

Dela ut djurkort, se Tillhörande dokument, till eleverna och låt dem börja arbeta. Om frågorna delas ut muntligt eller skriftligt avgör respektive lärare, beroende på elevgruppen.

Uppmuntra eleverna att dokumentera sitt arbete och sina resultat.

Dela eventuellt ut tabellen som finns i Tillhörande dokument, elever som behöver hjälp att upptäcka mönstret kan bli hjälpta av tabellen.

För att hjälpa eleverna att komma framåt kan läraren arbeta med följande frågor till eleverna:

- Hur kan du dokumentera dina resultat?
- På vilket sätt hjälper det dig att se ett mönster?
- Skriv upp dina resultat och analysera det.
- Kan du se något mönster?
- Hur kan du beskriva mönstret?

Lösningsförslag och matematiskt innehåll

Centralt innehåll åk 1–3, lgr 11.

- Hur enkla mönster i talföljder och enkla geometriska mönster kan konstrueras, beskrivas och uttryckas.
- Enkla tabeller och diagram och hur de kan användas för att sortera data och beskriva resultat från enkla undersökningar, såväl med som utan digitala verktyg.

Lösningsförslag. Även ett exempel på hur man kan ersätta bilder med tal.

2 kort: $\frac{1}{1}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{2}{2}$ $\frac{2}{1}$ = 4 djur

3 kort: $\frac{1}{1}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{2}{2}$ $\frac{2}{3}$ $\frac{2}{1}$ $\frac{3}{3}$ $\frac{3}{1}$ $\frac{3}{2}$ = 9 djur

4 kort: $\frac{1}{1}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{2}{2}$ $\frac{2}{3}$ $\frac{2}{4}$ $\frac{2}{1}$ $\frac{3}{3}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{3}{1}$ $\frac{3}{2}$ $\frac{4}{4}$ $\frac{4}{1}$ $\frac{4}{2}$ $\frac{4}{3}$ = 16 djur

5 kort: $\frac{1}{1}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{5}$ $\frac{3}{3}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{3}{5}$ $\frac{3}{1}$ $\frac{3}{2}$ $\frac{5}{5}$ $\frac{5}{1}$ $\frac{5}{2}$ $\frac{5}{3}$ $\frac{5}{4}$ = 25dj

$\frac{2}{2}$ $\frac{2}{3}$ $\frac{2}{4}$ $\frac{2}{5}$ $\frac{2}{1}$ $\frac{4}{4}$ $\frac{4}{5}$ $\frac{4}{1}$ $\frac{4}{2}$ $\frac{4}{3}$

Antal kort (n)	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Antal djur	4	9	16	25	36				

+5 +7 +9 +11

Antalet djur = $(\text{antalet kort})^2 = n^2$

Antalet djur ökar med (sista antalet kort + närmastföregående antalet kort)

∴ För varje kort ökar antalet djur med $(n + (n-1))$

Tillhörande dokument

Tabell för djurkombinationer av djur i två delar

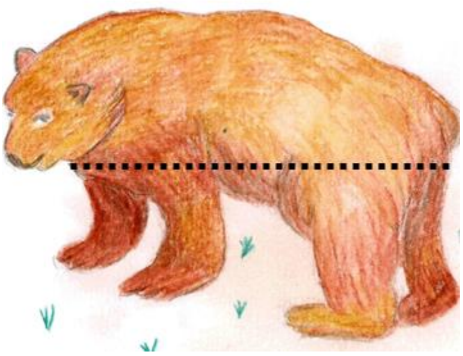
Antal djur (hela av samma sort)	Antal överdelar	Antal underdelar	Antal kombinationer
2			
3			
4			
5			

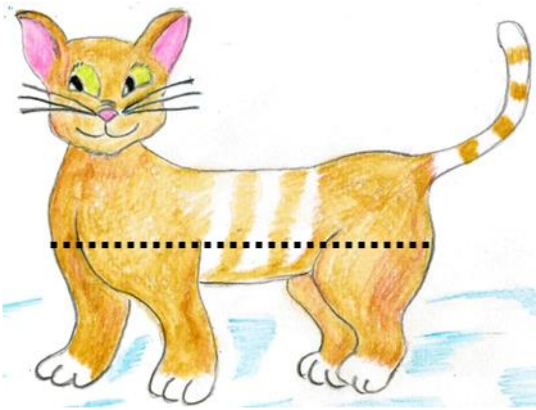
Tillhörande dokument

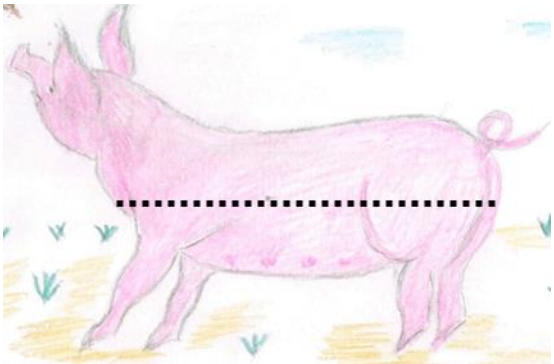
Tabell för djurkombinationer av djur i tre delar

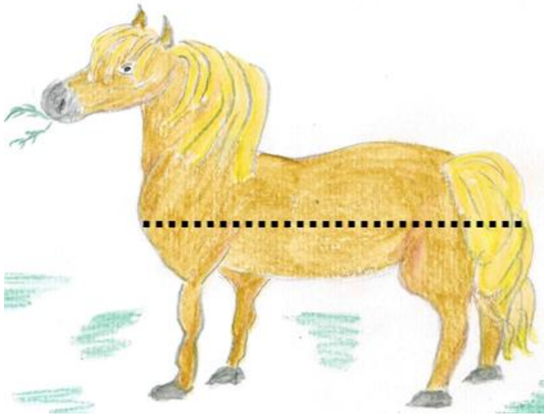
Antal djur (hela av samma sort)	Antal överdelar	Antal mittendelar	Antal underdelar	Antal kombinationer
2				
3				
4				
5				

Tillhörande dokument – Djurkort









Didaktiska och pedagogiska kommentarer

Uppgiften är tillfredställande eftersom alla elever, oavsett nivå, upplever att de blir färdiga och att de lyckas under en lektion, eller möjligtvis två.

Några begrepp, framförallt ordet kombination, behöver introduceras, vilket görs enkelt genom att t.ex. prata om kombinationer av klädesplagg.

De färdiga djurkorten hjälper eleverna att hålla fokus på matematiken. Som lärare bör man börja med att introducera några kort i taget, till exempel två djurslag delade i halvor, för att öka succesivt för de olika elevgrupperna. Det är viktigt att läraren uppmuntrar eleverna till att dokumentera sina lösningar så att deras resonemang framkommer. En del elever ”fastnar” lätt i att rita. Genom denna uppgift kan läraren uppmuntra eleverna i att ersätta bilder med symboler eller tal för att förenkla dokumentationen, se ett exempel i lösningsförslaget. Det kan vara bra att aktivt tala om för eleverna att de ska försöka hitta på förenklingar för djurens kroppsdelar och att de inte ska ägna för mycket tid till att rita.

De flesta barn i lågstadieåldern är inte vana vid att dokumentera strukturerat. Tabellen, se Tillhörande dokument, gav ett bra stöd och genom att använda den gavs eleverna ett tillfälle att träna på och lära sig att göra en strukturerad lösning som de själva kan analysera och tolka. Utan tabell upptäckte de lärare som utvecklade uppgiften att eleverna enbart bokförde hur många djur som bildades. De glömde notera hur många överdelar respektive underdelar de hade tillgång till, något som försvårade för dem att upptäcka mönstret.

Elever som har kommit längre i sin matematiska utveckling kan utmanas genom att sammanställa en egen form av dokumentation, men för de flesta elever är tabellen ett bra stöd.

Eleverna har inte svårt för att kombinera djurdelarna ’hur som helst’, utmaningen i uppgiften är att de ska göra det strukturerat så att inga kombinationer missas. Läraren behöver ha fortlöpande diskussioner med eleverna hur man kan göra, allt eftersom eleverna arbetar. De elever som efter en stund inte hittat någon struktur behöver hjälp, av andra elevgrupper eller, av läraren för att komma vidare.

De elever som behärskar multiplikationstabellen ser snabbt mönstret, att antalet överdelar och antalet underdelar kan multipliceras för att ge antalet djurkombinationer.

Uppgiften går lätt att anpassa, de som behöver extra hjälp kan lätt ges det till exempel genom att skapa struktur, de som behöver utmaning kan lätt ges det genom frågor kring hur de dokumenterar och ser mönster.

Referenser och källor

Olsson, I., Forsbäck, M. & Mårtensson, A. (1999). *Multimatte: Problemlösning B.* Natur & Kultur Läromedel.

Hälla vatten (åk 4–6)

Detta är en klassisk uppgift som finns i många varianter, vi är inspirerade av den version som finns på Valentina Chapovalovas matteblogg. Vi har inte förändrat grundfrågeställningen, men vi har lagt till utökade frågor.

Uppgiften upplevdes som engagerande och eleverna fängslades. Den har utmaningar till elever på alla nivåer, uppgiften kräver att eleven kan hålla ordning på flera tankesteg samtidigt. Detta gör att uppgiften ger möjlighet att träna på att göra strukturerade lösningar, samt att redovisa många led på ett sätt som andra kan följa.

Uppgiften är enkel att förstå och kräver förhållandevis lite förberedelsetid för läraren.

Uppgiftsformulering – Hälla vatten

Du står vid en sjö. Du har två hinkar. Den ena rymmer 9 liter, den andra 4 liter.

Hinkar vid Vänern. Foto Elisabet Mellroth

Hur kan du få exakt:

a) 5 liter vatten i en av hinkarna?

b) 1 liter vatten i en av hinkarna?

c) 6 liter vatten i en av hinkarna?

Utökning

1. Går det att få 2 liter, 3 liter, 7 liter etc?
2. Vad händer om båda hinkarna rymmer ett jämnt antal liter eller ett udda antal liter?
3. Hitta på ett liknande problem med tre hinkar.

Material

Mått motsvarande 9 l respektive 4 l.

Mått motsvarande jämna liter respektive udda liter.

Genomförandet

Eleverna kan arbeta enskilt, i par, eller i mindre grupper.

Läraren bör ha en introduktion till uppgiften så att eleverna uppfattar uppgiften på samma sätt. Till exempel behöver man förklara att

- Man har oändlig tillgång till vatten – från sjön.
- Hinkarna innehåller exakt antal liter och att de saknar måttmarkeringar.
- Man får hälla i och ut vatten från hinkarna hur mycket som helst.
- Det finns inte något extra kärl att förvara/samla vattnet i.
- Eleverna ska mäta upp exakt det antal liter som anges och att de ska vara säkra på att de har rätt.

Det fungerar bra att förklara dessa punkter genom en demonstration, eller genom att lösa det första problemet eller ett liknande gemensamt, innan eleverna arbetar själva.

Efter den gemensamma uppstarten låter man eleverna arbeta med problemet i sin egen takt. Eleverna bör själva komma fram till ett resonemang kring problemets lösningar, läraren är aktiv och uppmärksam i att stötta de elever som behöver stöttning och i att utmana de elever som behöver det. Till exempel kan man arbeta med att ställa frågor som till exempel:

Varför går det?

Varför går det inte?

Lösningsförslag och matematiskt innehåll

Centralt innehåll för åk 4–6 enligt lgr 11.

Taluppfattning och tals användning

- Centrala metoder för beräkningar med naturliga tal och enkla tal i decimalform vid överslagsräkning, huvudräkning samt vid beräkningar med skriftliga metoder och miniräknare. Metodernas användning i olika situationer.

Sannolikhetslära och statistik

- Tabeller och diagram för att beskriva resultat från undersökningar, såväl med som utan digitala verktyg. Tolkning av data i tabeller och diagram.

Problemlösning

- Strategier för matematisk problemlösning i vardagliga situationer.
- Matematisk formulering av frågeställningar utifrån vardagliga situationer.

Lösningsförslag

a) Fyll 9 litershinken och häll över i 4 litershinken. Kvar är då 5 liter i 9 litershinken.
b) Fyll 9 litershinken och häll över två gånger i 4 litershinken. Kvar är då 1 liter i 9 litershinken.
c) Fyll 9 litershinken och häll över två gånger i 4 litershinken. Det återstår då en liter i 9 litershinken. Den häller du över i 4 litershinken. Fyll åter 9 litershinken. Töm över i 4 litershinken. Du kommer då tömma över 3 liter eftersom det redan finns en liter i 4 litershinken. Kvar är då 6 liter i 9 litershinken.

Utökning

1. Mät upp 2, 3, respektive 7 liter.

a) **2 liter:** För att lösa denna kan man utgå från att man först löst problemet med att mäta upp 7 liter, uppgift 1c. Spara de 7 liter som då finns i 9 litershinken. Fyll upp 4 litershinken och häll över till 9 litershinken. Då har man 2 liter i 4 litershinken.
b) **3 liter:** Fyll 4 litershinken och häll över i 9 litershinken. Upprepa samma sak igen. Då har man 8 liter i 9 litershinken. Fyll 4 litershinken på nytt och häll över i 9 litershinken. Då har man 3 liter kvar i 4 literhinken.
c) **7 liter:** Utgå från att du mätt upp 3 liter, uppgift 1b. Häll över de 3 liter som finns i 4 litershinken till 9 litershinken. Fyll 4 litershinken och häll över i 9 litershinken. Då har man 7 liter i 9 litershinken.

2. Två hinkar med jämnt eller udda antal liter

Det går inte att få fram så många olika volymer (1, 2, 3, 5, 6, respektive 7 liter).

Två hinkar med jämna antal liter

Det går inte att få fram udda volymer om du har två hinkar med jämna volymer.

Detta på grund av att differensen, och summan av två jämna tal alltid är jämn.

$$2m - 2n = 2(m - n)$$
$$2m + 2n = 2(m + n)$$
$$där\ m\ och\ n\ \text{är}\ positiva\ heltal, m \geq n$$

Exempel
Du har två hinkar, en som 2-liters och en 6-liters. Då kan man få bara få fram 2, 4, 6, 8 liter.

Två hinkar med udda antal liter.

Med två hinkar med udda antal liter kan man få fram både jämna och udda antal liter.

Antag att hink A rymmer (*2k +1*) liter och hink B (*2n+1*) liter, antag också att *n>k*, d.v.s. att hink B rymmer mer än hink A. *k* och *n* är positiva heltal.

Till exempel:

Om hink B fylls först och därefter fylls hink A från denna, återstår ett jämnt antal liter i hink B.

$$(2n + 1) - (2k + 1) = 2n - 2k = 2(n - k)$$

Som en följd rymmer tomutrymmet i hink B är ett udda antal liter, d.v.s. samma volym som hink A har, (*2k+1*).

Om hink B rymmer mer än dubbelt så mycket som hink A, så kan hink A tömmas och fyllas igen med vatten från hink B. Det innebär att ett udda antal liter (*2k+*1) tas från ett jämnt antal liter (*2(n-k)*), vilket resulterar i att det blir ett udda antal liter kvar i hink B.

$$2(n - k) - (2k + 1) = 2n - 4k - 1 = 2(n - 2k) - 1$$

Det går naturligtvis även att tömma den ena eller andra hinken emellanåt för att kunna få fram fler möjligheter, se Tabell 1.

Tabell 1 Exempel på när Hink B är mer än dubbelt så stor som Hink A. Med 3 respektive 7 liters hinkar kan man mäta upp samtliga hela litrar mellan 1 till 10 liter.

n =3 k = 1	**Hink A** liter	**Hink B** liter	**Hink A + Hink B** liter	**Händelse**
Hink B: V=2n+1		7		
Hink A: V=2k+1	3			
	3	4	7	1a. Fyll B, häll över det som går till A.
	3	1	4	1b. Töm A, fyll upp A med det som är kvar i B efter 1a.
	1	0	1	1c. Töm A, fyll A med det som finns i B från 1b.
	3	5	8	1d. Fyll B, därefter fyll upp A (från 1c.) helt med vatten från B.
	0	6	6	2a. Fyll B 2 ggr med vatten från fulla A hinkar.
	2	7	9	2b. Fyll A, fyll därefter upp hink B (från 2a.) med vatten från A.

Fallet när Hink B är större än Hink A, men mindre än dubbelt så stor överlämnar vi tillsvidare åt läsaren att utveckla. Det samma gäller för fallet med tre hinkar som vi inte har testat inom ramen för projektet.

Naturligtvis är det bra att eleverna kritiskt granskar sina egna och varandras förslag. Vi tror att uppgiften är lämplig som en programmeringsuppgift.

Tillhörande dokument

Till denna uppgift har vi inte utvecklat något tillhörande dokument.

Didaktiska och pedagogiska kommentarer

Uppgiften fungerade bra för åldersgruppen, alla elever klarade den första deluppgiften och blev uppmuntrade vilket ledde till att de flesta försökte arbeta vidare. Det fanns utmaningar till alla elever i uppgiften, eleverna engagerades av uppgiften. Många elever tyckte uppgiften var svår, men rolig.

Den första uppgiften, eller en liknande, kan med fördel göras tillsammans för att skapa förståelse kring själva uppgiftsformuleringen. Man behöver förtydliga för eleverna att det är exakt antal liter i hinkarna och att det saknas måttangivelser och markeringar.

De flesta som genomförde uppgiften i vårt projekt använde sig inte av konkret material, det vill säga hinkar och vatten. Vi ser dock fördelen med att ha tillgång till någonting som kan symbolisera vatten och hinkar för att även kunna experimentera sig fram i uppgiften. Till exempel så hade eleverna till en av lärarna svårt att angripa uppgiften. När läraren visade konkret hur man kunde hälla förstod eleverna och kunde arbeta vidare.

Uppgiften ger träning i att tänka abstrakt i flera led. Uppgiften blir lättare att lösa för dem som kan hålla flera faktorer i huvudet samtidigt. Eftersom det är många faktorer att hålla ordning på är det en uppgift som uppmuntrar till att vara strukturerad i dokumentationen, till exempel kan man uppmuntra eleverna till att använda tabell eller liknande i sin dokumentation och redovisning.

Vi tror att uppgiften lämpar sig som en programmeringsuppgift, även om vi inte själva har prövat det inom projektet.

Referenser och källor

http://mattebloggen.com/

Staket (åk 4–6)

Bygga staket var en den uppgift som förändrades och omstrukturerades mest under de tre interventionerna. Lärarna som varit med i utvecklingen av uppgiften är inte helt eniga kring hur väl uppgiften fungerade.

Några lärare ansåg att uppgiften fångade eleverna direkt och gav dem möjlighet till att vara innovativa. De ansåg att det var en uppgift där matematiken kopplades ihop med behovet av att samla aktuella fakta från reella affärer, i detta fall byggaffärer. Framförallt poängterades uppgiftens möjlighet att stimulera elevernas kreativitet.

Några lärare ansåg att uppgiften var svårarbetat och att den saknade tillräckligt matematiskt djup och ville därför underkänna uppgiften i relation till projektets syfte kring att utmana och stimulera matematiskt särskilt begåvade elever.

Troligtvis är det så att vi inte hann färdigt med utvecklingen av denna uppgift inom ramen av projektet. Vi uppmanar de lärare som vill pröva uppgiften i sin undervisning att fortsätta arbeta med att utveckla uppgiften.

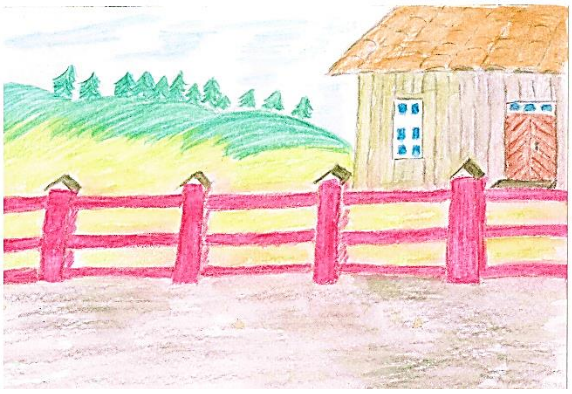
Uppgiften har sitt ursprung i Matteborgen direkt 5A (Falck & Picetti, 2004, s. 16):

Bruno har byggt ett staket som är 14 m långt. Stolparna till staketet står med 2 meters mellanrum. Hur många stolpar har staketet?

Vi presenterar uppgiften så som den såg ut när skolutvecklingsprojektet avslutades.

Uppgiftsformulering

Du ska bygga ett 14 meter långt staket utanför ditt hus. Staketet ska stå mot gatan.



a) Hur kommer ditt staket att se ut?

b) Hur många stolpar behöver du? Hur många plankor/brädor behöver du?

c) Hur mycket kommer ditt staket att kosta?

Utökning

Nu ska du måla staketet.

d) Hur mycket färg behövs? Vad kommer det att kosta?

Material

Antingen möjlighet att söka information om byggmaterial *eller*

Förberedd information om byggmaterial, se Tillhörande dokument. *Observera att i detta fall behöver dokumentet uppdateras varje år.*

Genomförandet

1 lektion, 60 minuter

Eleverna behöver förkunskaper om längd och enheterna *m* och *mm*.

Elever i åk 4–6 är oftast inte vana att notera hur staket utanför hus ser ut. De lärare som upplevde uppgiften positivt lyfter vikten av att börja lektionen med att diskutera olika typer av staket. Till exempel behöver man diskutera hur staketen sitter fast i marken, så att eleverna kommer ihåg att tänka på att räkna med staketstolparnas förankring i konstruktionen och i kostnaden.

Lektionen kan till exempel startas genom att visa ett bildspel på olika staket. I samband med detta kan man diskutera om var och varför man har staket, samt om dess förankring i marken.

Eleverna fick arbeta enskilt, i par eller i mindre grupper, de arbetade i sin egen takt.

Efter den gemensamma genomgången fick eleverna planera för sina egna staket, uppgift a).

Utifrån aktuella fakta från någon byggaffär fick eleverna sedan uppskatta vilket material de behövde ha och hur mycket av detta de behövde för sin konstruktion, uppgift b).

Därefter beräknade eleverna kostnaden för sina olika staket, uppgift c).

De elever som arbetade fortare än andra fick även beräkna färgåtgång och kostnad för målningen av staketet, uppgift d.

Som avslutning av lektionen fick eleverna presentera sina olika staket, dess utseende och kostnad. Vid denna presentation kan man lyfta frågor kring till exempel om de har tänkt på allt.

Lösningsförslag och matematiskt innehåll

Centralt innehåll för åk 4–6.

- Centrala metoder för beräkningar med naturliga tal och enkla tal i decimalform vid överslagsräkning, huvudräkning samt vid beräkningar med skriftliga metoder och miniräknare. Metodernas användning i olika situationer.
- Rimlighetsbedömning vid uppskattningar och beräkningar i vardagliga situationer.
- Metoder för hur omkrets och area hos olika tvådimensionella geometriska figurer kan bestämmas och uppskattas.
- Jämförelse, uppskattning och mätning av längd, area, volym, massa, tid och vinkel med vanliga måttenheter. Mätningar med användning av nutida och äldre metoder.

Lösningsförslag

Uppgiften resulterade i att i princip samtliga elever eller elevgrupper producerade egna och olika lösningar. För tillfället lämnar vi inga lösningsförslag på denna uppgift.

Varje elev eller elevgrupp konstruerade sina egna speciella staket. Vi ger en lista på några saker som är viktigt att ta hänsyn till beräkningarna för att de ska bli realistiska.

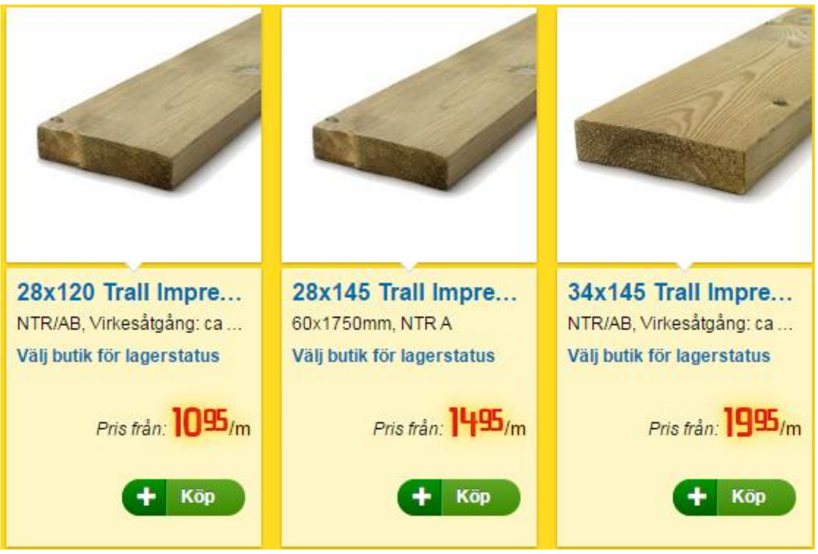
- Staketstolparnas förankring i marken. Kostnad för förankringen.
- Avståndet mellan stolparna så att staketet blir stabilt.
- Längden på de brädor som går att köpa i förhållande till den längd eleverna vill ha till sina staket. Tänka på att minska spillet.

Tillhörande dokument

Prisuppgifter hämtade från Byggmax.se i oktober 2016

Virke på metervara finns på lagret i bitar som är mellan 4–5 m långa.

Alla kvadratiska stolpar behöver också så kallade jordankare för att kunna sitta stadigt i marken. Ett annat alternativ är att gjuta betong och sätta i stolpskor. Information om detta utelämnas här.


28x120 Trall Impre...
NTR/AB, Virkesåtgång: ca ...
Välj butik för lagerstatus
Pris från: 10 95 /m
Köp
28x145 Trall Impre...
60x1750mm, NTR A
Välj butik för lagerstatus
Pris från: 14 95 /m
Köp
34x145 Trall Impre...
NTR/AB, Virkesåtgång: ca ...
Välj butik för lagerstatus
Pris från: 19 95 /m
Köp


28x45 Staketribba
Finns i olika längder
Finns ej i lager
Pris från: 11 00 /m
Välj


SVENSKT VIRKE
Trall 22x95 används till att bygga altangolv. Den impregnerade trallen är hyvlad på fyra sidor, och har mjukt rundande kanter. När du ska skruva trall, tänk på att en trallbräda alltid har en sida som är lite finare så syna dina trallbrädor innan du skruvar fast dem!
Varuinformation
välj tillbehör
Spik och skruv
1 Välj
7 90 /M
KÖP
Välj butik för lagerstatus

Didaktiska och pedagogiska kommentarer

Som nämnt i inledningen upplevde lärarna implementeringen av uppgiften olika. Uppgiften förändrades väldigt mycket under interventionsperioden. I detta avsnitt försöker vi samla de didaktiska och pedagogiska kommentarer som framförallt kan hjälpa till ett positivt genomförande av uppgiften. De orsaker som några lärare nämnt till varför uppgiften inte fungerade lyfts också

För att eleverna ska kunna genomföra uppgiften behöver de ha förkunskaper om längd och längdenheter. De behöver också ha kunskap om hur staket kan se ut och hur de kan förankras i marken.

Eleverna kan uppmärksammas på hur staket framför hus kan se ut på olika sätt. Till exempel kan eleverna få i uppgift att studera och redogöra för hur olika staket ser ut i områden där de bor. Ett annat sätt som fungerade bra i vårt projekt var att förbereda ett bildspel med olika typer av staket. När detta visades diskuterade läraren och eleverna i klassen de olika staketen och deras konstruktion. Utöver att eleverna på detta sätt fick förkunskaper om stakets konstruktion inspirerades de också inför sina egna konstruktioner.

Vid implementeringen av uppgiften visade det sig att de flesta elever klarade av att rita/konstruera sina egna staket. Svårigheterna kom när de skulle räkna ut antalet stolpar och brädor som behövdes.

Vi upplever att uppgiftens styrka ligger i att den uppmuntrar till kreativitet, men vi har en viss tveksamhet kring om det finns ett matematiskt djup. Eventuellt kan uppgiften bli en kreativ uppgift som kan göras ihop med teknikämnet. Då skulle eleverna till exempel få möjlighet att göra minimodeller, till exempel med hjälp av glasspinnar, av sina staket och därmed kan även begreppet skala introduceras. En fördel med uppgiften var att alla elever kunde arbeta med den och blev engagerade, de svaga och de särskilt begåvade.

Några av lärarna som genomförde uppgiften ansåg inte att uppgiften uppfyller syftet med projektet, framför allt gällande att erbjuda matematiska utmaningar till alla elever. Vi kan därför inte rekommendera denna uppgift som en uppgift lämplig att använda för att stimulera matematiskt särskilt begåvade elever.

Referenser och källor

Falck, P. och Picetti, M. (2004). *Matte direkt. Borgen. 5A*: *Grundbok.* Sanoma Utbildning.

Maximera Area (åk 7–9)

Uppgiften är inspirerad av artikel av Pesach Laksman i Nämnaren, 2008. Uppgiften handlar om att skapa förståelse för samband mellan omkrets, area.

Utgående från att omkretsen hålls konstant undersöker eleverna laborativt hur stor area som kan skapas av en månghörning.

Till sin hjälp har eleverna ett hopknutet snöre och prickpapper.

En del elever har redan en stark övertygelse om att cirkeln kommer ge den största arean. Uppgiften erbjuder då möjlighet att utmana dessa elever att arbeta med geometriska bevis.

Denna uppgift skiljer sig från de övriga uppgifter i projektet på det sätt att vi har många frågor som leder eleverna framåt. Efter att uppgiften prövats i projektet har vi kommit fram till att även om dessa frågor inte är nödvändiga för de matematiskt särskilt begåvade eleverna, så behövs dem för att få uppgiften att fungera i det heterogena klassrummet.

En alternativ frågeställning som kan ges till en matematiskt särskilt begåvad elev kan t.ex. vara:

- Undersök sambandet mellan area och antalet hörn i en månghörning, förutsatt att omkretsen hålls konstant.

Med en sådan formulering är uppgiften mer öppen och möjliggör för elevens egen kreativitet att verka.

Trots att inte vi har arbetat med dynamiska program i denna uppgiften, så ser vi goda möjligheter i att till exempel använda GeoGebra eller liknande program för att laborera med uppgiften.

Uppgiftsformulering

Triangel

Forma en triangel av ert snöre.

1. Forma en rätvinklig triangel och beräkna arean.
2. Forma en liksidig triangel och beräkna arean.
3. Forma en tredje variant av triangel och beräkna arean.
4. Vilken av trianglarna har störst area?

Fyrhörning

Forma en fyrhörning av ert snöre.

5. Laborera med snöret och bilda minst tre olika fyrhörningar. Vilken av fyrhörningarna har störst möjliga area? Beskriv denna fyrhörnings form.

6. Förklara varför det blir just denna fyrhörning som ger den största arean.

7. Jämför dina slutsatser om triangel och fyrhörning. Vad ser du för samband?

Månghörningar

8. Skapa geometriska figurer med **fler än fyra** hörn Försök skapa en geometrisk figur med så stor area som möjligt, beskriv hur den figuren ser ut.

9. Beskriv sambandet du hittar kring hur arean ökar.

10. Hur kan du övertyga både dig själv och någon annan om att sambandet stämmer?

Material

- Ett hopknutet snöre, utgå från snören som är ca 60 cm långa.
- Prickpapper, finns att hämta på ncm.gu.se under *'Nämnaren på nätet'* under '*ArkivN*' under '*matematikpapper*', eller via direktlänk http://ncm.gu.se/matematikpapper
- Linjal och gradskiva.
- Eventuellt GeoGebra eller liknande program.

Genomförandet

Tid: 1 timme.

Eleverna behöver arbeta i par eller i mindre gruppen om tre personer för att uppgiften ska fungera rent fysiskt. Det är svårt att hålla koll på snöret ensam.

Eleverna kommer att arbeta i väldigt olika takt, och komma olika långt i uppgiften. Det är viktigt att du som lärare uppmuntrar alla att jobba i sin takt och att ordentligt resonera kring sina slutsatser. Som lärare kan du t.ex. ställa frågor som:

- Beskriv den geometriska formen.
- Argumentera för varför just den formen ger störst area.
- Beskriv sambandet du hittar, matematiskt.
- Kan du bevisa att sambandet stämmer?

Lösningsförslag och matematiskt innehåll

Centralt innehåll för åk 7–9 i Lgr11.

- Geometriska objekt och deras inbördes relationer. Geometriska egenskaper hos dessa objekt.
- Metoder för beräkning av area, omkrets och volym hos geometriska objekt, samt enhetsbyten i samband med detta.

Uppgiften är laborativ, vi ger enbart korta kommentarer som exempel på svar för respektive fråga. Som lärare kräver denna uppgiften att man är mycket adaptiv (se t.ex. Le Fevre, Timperley, & Ell, 2015), d.v.s. redo att fånga och utveckla elevernas tankar och idéer där och då när de kommer.

Ungefärliga svar på frågorna 1–7. Vi utgår först från att snöret är hopknutet så att öglans omkrets är ca 60 cm långt.

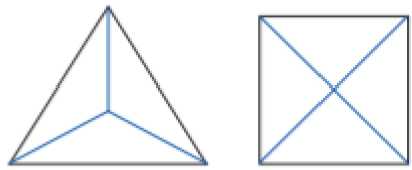
1. Arean kan variera från 0 upp till ca 155 cm^2.
2. Arean bör ligga på ca 174 cm^2.
3. Arean bör hamna mellan 0 och 174 cm^2.
4. Den liksidiga har störst area.
5. Den liksidiga fyrhörningen har störst area, arean är då ca 225 cm^2.
6. De liksidiga månghörningarna har större area än de andra som inte är liksidiga, förutsatt att de har lika många hörn och samma omkrets.
7. Det verkar som om arean ökar ju fler hörn de liksidiga månghörningarna får.

Exempel på svar till uppgift 8–10, månghörningar

8. Cirkeln får störst area. Alternativt, en liksidig månghörning med oändligt många hörn ger den största arean.
9. Förutsatt att omkretsen hålls konstant, så ökar arean hos liksidiga månghörningar när antalet hörn ökas. Uttryckt med variabler: arean, A, hos en liksidig månghörning med fix omkrets, O, går mot $A = \frac{O^2}{4\pi}$, när antalet hörn går mot oändligheten.
10. Hur kan du övertyga både dig själv och någon annan om att sambandet stämmer? Se exempel på geometriskt bevis hämtat från Pesach Laksmans artikel i nämnaren från 2008, hela artikeln hittar ni via följande länk: http://ncm.gu.se/pdf/namnaren/2831_08_3.pdf

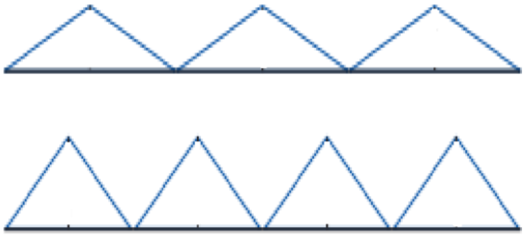
Det gäller alltså att med ett övertygande resonemang att visa varför arean blir större ju fler hörn som finns i den regelbundna n-hörningen. Förutsatt att omkretsen hålls konstant. Laksmans bevis är geometriskt och börjar med att tyngdpunkten i respektive *n*-hörning markeras, Laksman visualiserar detta för en regelbunden tre- respektive fyrhörning, med samma omkrets. Vi återger Laksmans resonemang, delvis med egen text i denna rapport, använd Laksmans originalartikeln vid eventuell referens.

Tyngdpunkten förbinds med respektive hörn så att trianglar bildas, se Figur 1.



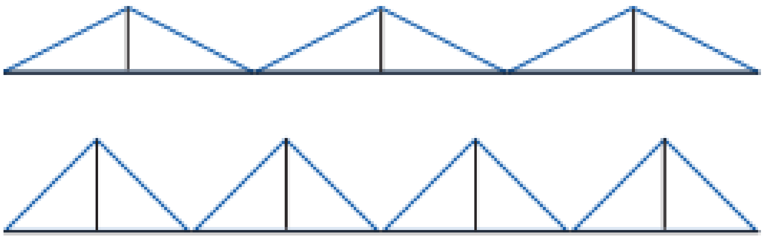
Figur 1 Linjer markerade mellan tyngdpunkten och hörnen för en liksidig trehörning respektive en liksidig fyrhörning.

Trianglarna ”klipps upp” och läggs bredvid varandra, se Figur 2



Figur 2 Trehörningen och fyrhörningen i Figur 1 utvecklade efter de markerade hörn-tyngdpunktslinjerna.

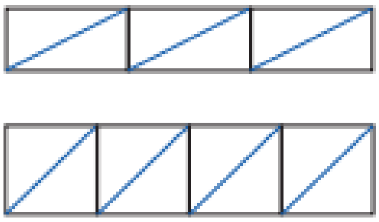
Eftersom omkretsen är gemensam för alla n-hörningar blir längden av triangelraden samma. Men ju fler hörn som finns på den regelbundna månghörningen, desto fler trianglar kommer att bildas. Ganska naturligt blir antalet trianglar n st, av en regelbunden n-hörning, detta ger att trianglarna också kommer ha olika höjder, ju fler trianglar som bildas, desto högre höjd kommer de att ha.



Figur 3 Höjderna markerade för de bildade trianglarna i Figur 2.

Klipp nu, på riktigt eller i tanken, respektive trianglar i dess höjder, se markering i Figur 3.

Bygg om trianglarna till rektanglar, se Figur 4.



Figur 4 Resultatet av ombyggnaden av trianglarna i Figur 3 till rektanglar.

De bildade rektanglarna, i Figur 4, har samma bas, d.v.s. hälften av ’triangelraden’ i Figur 3.

Rektanglarna har samma höjd som de trianglarna de har sitt ursprung från. D.v.s. ju färre trianglar (färre hörn i n-hörningen) desto lägre höjd och således mindre area på rektangeln. Eftersom arean för en rektangel ges av basen, som är samma för alla, multiplicerat med höjden, som är högre ju fler hörn i månghörningen, ges det att ju fler hörn *n*-hörningar har desto större area kommer *n*-hörningen att få.

Utökning

11.

a) Skapa trianglar, fyrhörningar etc (*n-hörningar*) och fördubbla arean på dessa.

b) Vad händer då med omkretsen?

12.

a) Går det att skapa en fyrhörning där **både** area och omkrets är dubbelt så stora som i en ursprunglig?

b) Om så är möjligt, visa i vilka fall det går.

13.

a) Omvänt – går det alltid att från en godtycklig rektangel skapa en ny med hälften så stor omkrets respektive area?

b) Visa i så fall hur detta kan motivera

Didaktiska och pedagogiska kommentarer

För att sätta uppgiften i ett sammanhang kopplade någon av lärarna uppgiften till Fåret Eric. "I denna uppgift ska vi skapa så stor hage som möjligt till Eric."

Det tar lång tid att knyta ihop 60 cm långa snören, det kan vara ett alternativ att läraren har förberett detta.

Laborerandet med snöret hjälper eleverna att få en känsla för vad som är största area kopplat till den geometriska formen. En del elever försökte dock rita efter snöret. För att kunna vara noggranna är det en fördel om eleverna har linjal och gradskiva.

För att uppgiften ska bli meningsfull måste eleverna ha förkunskaper om omkrets och area. Utan dessa förkunskaper blir det svårt att diskutera största area. Med dessa förkunskaper kan alla elever påbörja uppgiften och hitta djup i den.

I de klasser som testat uppgiften i projektet hann ingen elev till beviset på en lektion. För att kunna angripa beviset behöver även särskilt begåvade elever stöd. Ett tips från vårt projekt är att påbörja beviset i helklass så att alla förstår starten. Därefter kan elever återigen hitta olika djup i uppgiften och de som var särskilt begåvade kan komma vidare. Lösningarna från eleverna blev väldigt olika. De flesta elever i det heterogena klassrummet behöver mycket ledning i beviset.

Ytterligare fördjupning

I projektet hann vi aldrig testa följande fördjupningar till uppgiften. Det fanns inte någon elev i de klasser uppgiften testades i som behövde ytterligare djup. Frågorna finns med för den läraren med elever som kräver ytterligare djup. Vi tror också att dessa frågor kan ligga till grund för ytterligare laborationer med hjälp av dynamiska program som t.ex. GeoGebra.

Referenser och källor

Laksman, P. (2008). Geometri med snöre. Nämnaren 2008:3, 28-31.

Le Fevre, D., Timperley, H., & Ell, F. (2015). Curriculum and Pedagogy: The Future of Teacher Professional Learning and the Development of Adaptive Expertise. *The SAGE Handbook of Curriculum, Pedagogy and Assessment*, 309 -324. City, State: Publisher.

Studsande bollar (åk 7–9)

Denna uppgift är en av de som har minst likhet med sitt ursprung. Vi tycker det är viktigt att påpeka detta för att visa hur rik en uppgift kan bli genom att kollegialt och strukturerat arbeta med att utveckla en relativt vanlig textboksuppgift.

Studsande bollar är alltså ett mycket bra exempel på att lärarna genom projektet har lärt sig att anpassa uppgifter så att de inkluderar och utmanar fler elever.

Ursprungsuppgiften är hämtad från Matematikboken Extraboken (Undvall, Forsberg, Olofsson, & Johnson, 2009)

Om man släpper en ny tennisboll från en viss höjd så ska den vid varje studs studsa upp 55% av höjden den faller från. Vi släpper en tennisboll från 2 m höjd. Hur hög bör den femte studsen bli? Avrunda till hela centimeter.

Genom den omarbetade uppgiften uppmanas eleverna till att först experimentera för att finna samband. Genom experimenterandet kommer de också upptäcka vikten av att göra upprepade mätningar för att få acceptabla resultat, därigenom tränas de på ett vetenskapligt arbetssätt.

Efter att de genomfört experimentet och funnit samband, uppmanas de i att skapa sig teoretiska hypoteser kring liknande experiment, som sedan prövas i praktiken. Vilket gör att de därmed testar sina egna teoretiska modeller. Uppgiften erbjuder bra diskussioner om hur grafer ritas och hur koordinataxlar kan graderas.

Det bildas gärna ett lätt kaos när eleverna får arbeta med uppgiften och läraren måste extra noga tänka på att vara tydlig och strukturerad i sina instruktioner. I Kreativiteten som uppstår blir det en ganska rörig lektion med bollar och måttband överallt. Vinsterna i ett rikt matematiskt innehåll överväger dock. Alla kan göra något i uppgiften och eleverna får många insikter och upplevelser

Trots att inte vi har arbetat med dynamiska program i denna uppgiften, så ser vi goda möjligheter i att till exempel använda GeoGebra eller liknande program för att laborera med uppgiften.

Uppgiftsformulering

Under de tio sista minuterna på lektionen kommer din lärare att släppa bollen han eller hon har från en specifik höjd. Den grupp som kan ange det närmaste värdet på studshöjden är bäst.

Din lärare ska släppa en boll från en viss höjd.

Kan du och din grupp förutse vilken höjd bollen studsar upp till efter en studs?

Undersökning

1. Ta reda på höjden efter en studs och fyll i tabellen.

Släpphöjd	2 m	1,5 m	1,3 m	1 m	0,8 m	0,5 m
Höjd efter första studs						

2. Kan du utifrån resultaten i tabellen säga hur högt en boll studsar om du släpper den från
   a. 1,2 m
   b. 2,2 m
3. Finns det något förhållande mellan höjden efter första studsen och höjden där du släpper bollen?

Utökade frågor

4. Om man släpper en annan tennisboll från en viss höjd, hur mycket förlorar den i studs varje gång i förhållande till höjden den faller från?
5. Hur högt studsar bollarna upp efter femte studsen om du släpper dem från 2 meters höjd? Använd dig av matematiska modeller och resonemang innan du testar med bollarna.
6. Vid vilken studs är det rimligt att bollen stannar på golvet, vid 2 meters släpphöjd?
7. Hur lång är den sammanlagda 'studssträckan' som bollen rört sig innan den stannar om den släppts vid 2 meter?

Släpphöjd	Höjd efter 1:a studs	Höjd efter 2:a studs	Höjd efter 5:e studs	Höjd efter 10:e studs	
2 m					

Material

- Bollar av olika sorter[1].
- Bra mätverktyg, tumstock, digitala mätredskap, måttband som tejpas på väggen.
- Möjlighet att filma och spela upp film i slowmotion.
- Eventuellt GeoGebra eller liknande program.
- Eleverna behöver förkunskaper i procent, samband, procent, tabeller och grafer.

Genomförandet

Tid: 2 x 1 klocktimme d.v.s. 2 lektionstillfällen ett praktiskt och ett teoretiskt.

Bestäm var på bollen man ska mäta studshöjd, över bollen, under bollen eller mitt på bollen.

Vi införde ett tävlingsmoment, läraren visade upp en boll som hon, eller han, skulle släppa i slutet av lektionen. Den elevgrupp som bäst kunde gissa studshöjden skulle vinna tävlingen. För att tävlingen ska bli rättvis är det viktigt att man har bestämt var man ska mäta studshöjden.

Eleverna behöver arbeta i par eller i mindre gruppen om 3–4 personer för att uppgiften ska fungera rent fysiskt. Det är svårt att släppa bollen och mäta studshöjd samtidigt.

Tänk på att eleverna inte får påbörja sitt praktiska arbete innan de har en hypotes eller räknat fram femte studsen innan de provar.

Uppmuntra eleverna att vara kreativa i sina sätt att klara av att mäta studshöjden. Eleverna som testade uppgiften ihop med oss filmade till exempel studsarna med sina mobiltelefoner. De hade tejpat fast ett måttband på väggen. Då kunde de spela upp filmen i slowmotion och avgöra studshöjden på bollen.

[1] Kontrollera bollarna så att de inte tappar 50% i höjd från föregående studs, detta gör t.ex. pingisbollar. Diskussioner kring procentuell förändring och förändringsfaktor uteblir när eleverna kan räkna med hälften. Kontrollera också att bollarna inte tappar studs för fort. Vissa tennisbollar slutar studsa efter tre studsar.

Lösningsförslag och matematiskt innehåll

Centralt innehåll, Lgr11 åk 7–9

- Tabeller, diagram och grafer samt hur de kan tolkas och användas för att beskriva resultat av egna och andras undersökningar, såväl med som utan digitala verktyg. Hur lägesmått och spridningsmått kan användas för bedömning av resultat vid statistiska undersökningar.
- Procent för att uttrycka förändring och förändringsfaktor samt beräkningar med procent i vardagliga situationer och i situationer inom olika ämnesområden.

Lösningsförslag

Uppgiften är laborativ, vi ger ett exempel på ett möjligt arbetssätt och en möjlig lösning. Som lärare kräver denna uppgiften att man är mycket adaptiv (LeFevre, Timperley, & Ell, 2015), till exempel redo att fånga och utveckla elevernas tankar och idéer där och då när de kommer.

Lösningsförslaget tar inte hänsyn till friktion, luftmotstånd eller att bollarna troligtvis även rör sig i horisontalled. Uppmuntra de elever som resonerar kring de faktorerna.

Antag att:
Bollen studsar tillbaka till 80% av höjden för varje studs.

Släpphöjd: 2m

Höjd efter studs 1: $0{,}8 \cdot 2m = \underline{1{,}6\,m}$

— " — " — 2: $0.8 \cdot 1{,}6m = 1{,}28m \approx \underline{1{,}3\,m}$

— " — " — 3: $0.8 \cdot 1{,}28m = 1{,}024\,m \approx \underline{1{,}0\,m}$

— " — " — 4: $0.8 \cdot 1{,}024\,m = 0{,}8192\,m \approx \underline{0{,}8\,m}$

— " — " — 5: $0.8 \cdot 0{,}8192\,m = 0{,}65536\,m \approx \underline{0{,}7\,m}$

Generellt:

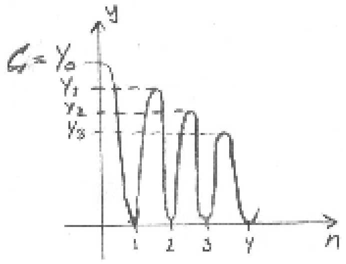
Släpphöjd: G

Förändringsfaktor: x

Antal studsar: n

Maxhöjd efter studs n: Y_n

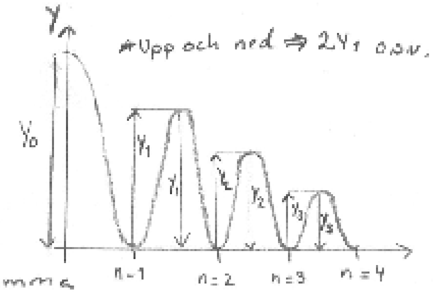
$$Y_n = G \cdot x^n$$



Studssträcka

Antag att bollen studsar på samma prick, d.v.s. inte studsar iväg.

Studssträckan vid (n+1):a studsen blir då studssträckan S_{n+1}



$$S_{n+1} \overset{*}{=} Y_0 + 2Y_1 + \ldots + 2Y_{n-1} + 2Y_n$$

$$S_{n+1} = G \cdot x^0 + \underbrace{2G \cdot x^1 + 2G \cdot x^2 + \ldots + 2 \cdot G \cdot x^{n-1} + 2 \cdot G \cdot x^n}$$

$$S_{n+1} = G + 2x\underbrace{(G + Gx + \ldots + Gx^{n-2} + Gx^{n-1})}_{\text{Geometrisk summa}}$$

$$\frac{G(x^n - 1)}{n-1}$$

$$\Rightarrow \underline{S_{n+1}} = G + 2x \cdot \frac{G(x^n-1)}{n-1} = \underline{G\left[1 + \frac{2x(x^n-1)}{n-1}\right]}$$

Didaktiska och pedagogiska kommentarer

Den här uppgiften erbjuder stort engagemang och kreativitet. Bollarna är mycket lockande för eleverna, som lärare måste man vara extra noga med att ge tydliga och strukturerade instruktioner. Till exempel bör eleverna inte få lov att påbörja sitt praktiska arbete innan de har en hypotes eller ett förslag på hur de kan beräkna höjden på femte studsen.

Ju fler förkunskaper eleverna har, desto fler lösningsförslag får man att diskutera i klassen. Uppgiften passar att genomföra under flera olika arbetsområden i matematik, till exempel: samband, grafer, tabeller, procent. Genom att man som lärare väljer när uppgiften genomförs så påverkas troligtvis eleverna till vilken modell de väljer för att upptäcka sambandet. Om uppgiften genomförs i högstadiets senare del ökar möjligheterna till att eleverna har förkunskaper inom flera områden för att arbeta med uppgiften. På så vis blir det fler olika lösningsmodeller i klassrummet. För de elever som väljer att arbeta med grafer erbjudes bra tillfällen att diskutera hur grafer ritas och hur axlar bör graderas.

Det är svårt att hinna med att mäta studshöjden på bollen i verklig 'studsfart'. Det är en fördel om eleverna kan filma, för att sedan spela upp filmen i slowmotion, samt pausa. Eleverna till lärarna i detta projekt använde sina mobiltelefoner till detta. Det var omöjligt att arbeta färre än två elever per grupp i denna uppgift, åtminstone under det praktiska arbetet.

När uppgiften utvecklades var tanken att eleverna skulle ledas till att arbeta med procentuella förändringar respektive förändringsfaktor. För att detta ska möjliggöras så är valet och utprövningen av de bollar som ska användas viktigt. De bollar som har en studshöjd på 50% av föregående blev för lätt, alternativt stimulerade inte eleverna till att räkna med förändringsfaktorer eller procent. Det är också bra att ha olika varianter av bollar, som har olika förändring av studshöjder. Vi fann att studsbollar fungerade bra, dock var de lite ostyriga i sina studsar. Studsbollarnas ostyrighet hjälpte dock eleverna att förstå behovet av en matematisk modell, å andra sidan blev det av samma orsak svårt att testa sin modell.

Denna uppgift gav alla möjlighet att arbeta, eleverna fick många insikter och upplevelser. En elev med särskild begåvning i matematik ville snabbt prova andra bollar läraren hade med. - Hur blir det med basketbollen? En stor nyfikenhet och iver att upptäcka infann sig.

Elever som inte är så starka i matematik, i alla fall inte vid bedömning av sin egen förmåga och tilltro till den, behövde hjälp att välja verktyg för hur man kan undersöka samband. De behövde få samtala om olika möjligheter som tabell, graf, procent osv.

Vi rekommenderar att man använder en lektion till praktiskt arbete och en till teoretiska diskussioner om det matematiska innehållet och grafkonstruktion.

Referenser och källor

Le Fevre, D., Timperley, H., & Ell, F. (2015). Curriculum and Pedagogy: The future of teacher professional learning and the development of adaptive expertise. In D. Wyse, L. Hayward & J. Pandya, *The SAGE Handbook of Curriculum, Pedagogy and Assessment*, 309 -324. Ort, State: Sage. https://doi.org/10.4135/9781473921405.n20

Undvall, L., Forsberg, S., Olofsson, K-G., och Johnson, K. (2009). *Matematikboken Extraboken*. Liber