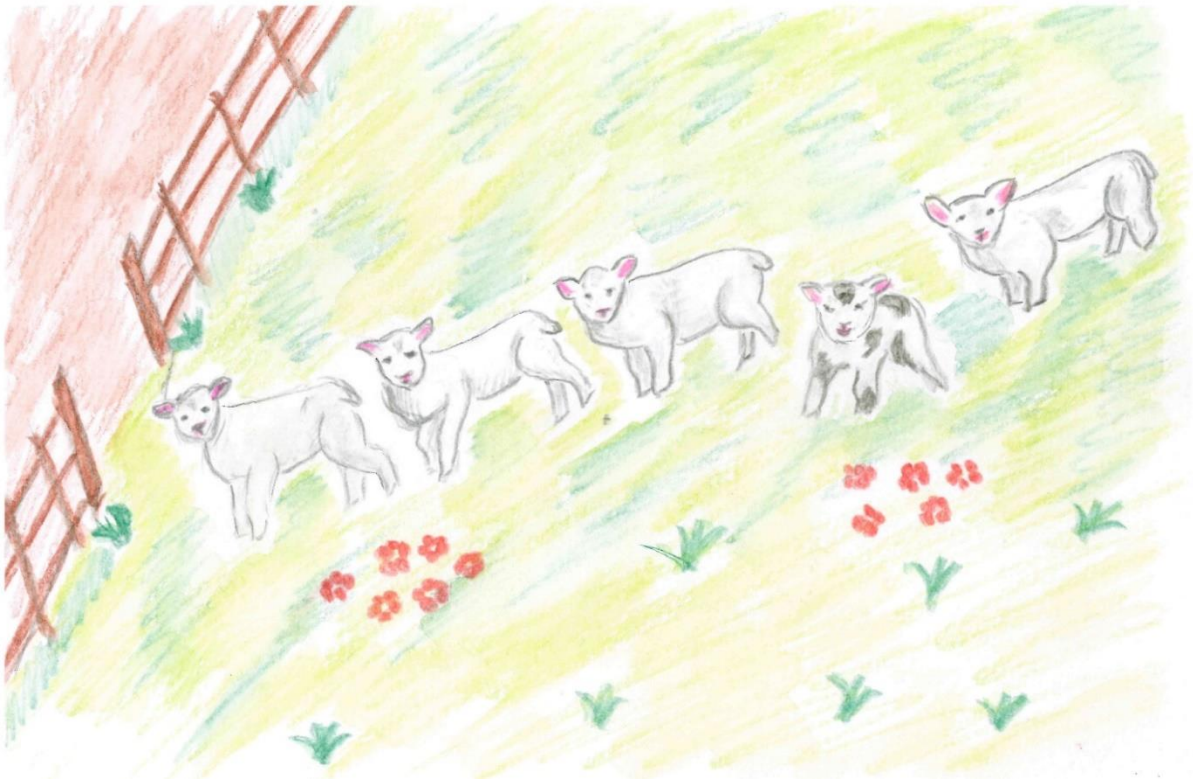


Med rätt att utmanas – i en skola för alla

Att utveckla verksamheten kring att inkludera elever med särskild begåvning i lärande.

Del 1: Att bredda kompetensen

Ett skolutvecklingsprojekt i Karlstads kommun 2015-2017

Elisabet Mellroth

Version 2, juni 2018. Rapporten kommer att revideras och uppdateras regelbundet.

Erik Johan Ljungbergs utbildningsfond har finansierat projektet

KARLSTADS KOMMUN

LJUNGBERGS FONDEN

Förord till andra versionen av rapporten, juni 2018.

Projektet är genomfört med Karlstads kommun som huvudman. Erik Johan Ljungbergs utbildningsfond har finansierat projektet.

Texten kommer löpande att uppdateras och revideras. Du som läsare är varmt välkommen att höra av dig om du hittar felaktigheter, språkliga såväl som matematiska. Mejla då elisabet.mellroth@karlstad.se

Texten är sammanställd av Elisabet Mellroth, projektledare, som också ansvarade för revideringen av rapporten under våren 2018.

Tack till Elisabeth Nyberg för språkliga kommentarer.

Tack också till Ragnhild Eriksson som har gjort de flesta av illustrationerna.

Sammanfattning

Detta är en rapport av ett skolutvecklingsprojekt som pågått från och med våren 2015 till och med våren 2017, det vill säga tre år. Projektets övergripande syfte var att möta den problematik som finns i svensk skola kring att elever med särskild begåvning ofta är understimulerade och ofta lämnas utan stöd och stimulans att vidareutvecklas i kunskap genom undervisning i skolan. Ett mer konkret syfte var att på vetenskaplig grund utveckla innehåll och undervisningssituationer i matematik för elever med särskild begåvning i matematik i det svenska heterogena klassrummet. Målet var att öka kunskapen hos skolpersonal om dessa elever, deras behov, styrkor och svårigheter, samt deras rättigheter. Ett mer detaljerat mål var att definiera vilken typ av innehåll som lämpar sig för elever med särskild begåvning, både med avseende på matematiska förmågor och specifikt matematikinnehåll. Ett ytterligare mål var att identifiera några typer av undervisningssituationer som är speciellt lämpliga för dessa elever i det vanliga klassrummet.

Som resultat av projektet har 14 grundskolelärare i Karlstads kommun och en i Borlänge kommun utvecklat sin kompetens att identifiera elever med särskild begåvning i sina klassrum. De har också utvecklat sin kompetens i att möta dessa elever i undervisning. Lärarna uppger vidare att de har ändrat sitt tankesätt kring hur undervisning kan gå till, vilket lett till att de nu utmanar alla elever i klassrummet mer. Genom projektet har vi analyserat, utvecklat och i tre interventioner prövat tio matematikuppgifter. Denna rapport beskriver projektet och de utvecklade uppgifterna, som finns presenterade i rapporten, är ett sätt att sprida projektet vidare till andra pedagogiska verksamheter. Vår förhoppning är att rapporten kan hjälpa andra att utveckla sina verksamheter så att fler elever med särskild begåvning får stöd och stimulans att utvecklas vidare i kunskap genom undervisning i svensk skola.

Innehåll

Metod 8
Genomförande 8
Beskrivning av projektets upplägg och delmål 9
Läsår 1 9
Redogörelse för projektets innehåll 12
Att arbeta online 12
Träff 1 – Särskild begåvning 14
Karakteristika för elever med särskild begåvning 14
Affektiva karakteristika 14
Särskild begåvning i matematik 15
Uppgifter i matematik för elever med särskild begåvning i matematik 15
Diskussionsfrågor 16
Storgrupp 16
Gruppdiskussion 16
Workshop 16
Träff 2 - Identifikation 18
Identifiering av särskild begåvning 18
Identifiering av matematisk särskild begåvning 18
Gruppdiskussion 19
Workshop 19
Träff 3 - Social och emotionell utveckling 20
Gruppdiskussion 20
Workshop 21
Träff 4 - Underpresterare 23
Underprestation 23
Gruppdiskussion 23
Workshop 23
Träff 5 – Differentierad undervisning 25
Differentiering 25
Gruppdiskussion 25
Träff 6 – Extra aktiviteter 27
PriMa-projektet i Hamburg, Tyskland, ett konkret exempel på en extra aktivitet 27
Gruppdiskussion 27

Träff 7 och 8 – Utveckla uppgifter inför läsår två 30
Testa uppgifterna kollegialt genom rollspel 30
Implementering av uppgifter – läsår 2 32
10 uppgifter 34
Uppgiftsformulering 34
Grund 34
Utökning 34
Material 34
Genomförandet 34
Lösningsförslag och matematiskt innehåll 34
Tillhörande dokument 34
Didaktiska och pedagogiska kommentarer 34
Litteratur 35
Litteratur som använts konkret 35
Litteratur som legat till grund för projektet, t.ex. som underlag för presentationer, workshops och arbetet med uppgifterna 36
Externa föreläsare 37
Filmklipp som använts i projektet 37
Bilaga 1 Inbjudan till deltagande i skolutvecklingsprojekt
Bilaga 2 Anmälan till deltagande i skolutvecklingsprojekt
Bilaga 3 Matematiska förmågor enligt Krutetskii
Bilaga 4 Kännetecken på särskild begåvning inom matematik enligt Sheffield
Bilaga 5 Guide till att analysera uppgifter
Bilaga 6 Nissens elevchecklista
Bilaga 7 Nissens föräldrachecklista
Bilaga 8 Nissens lärarchecklista
Bilaga 9 Att ställa rätt frågor, Sheffield
Bilaga 10 Sheffields öppna inställning till problemlösning
Bilaga 11 Exempel på uppgiftsanalys
Bilaga 12 Utökade frågor/aktiviteter
Bilaga 13 Differentierad undervisning, Tomlinson
Bilaga 14 The suitability of rich learning tasks from a pupil perspective
Bilaga 15 Arbete med uppgiftsplanering

Bilaga 16 Vikproblemet

Bilaga 17 Schackdrottningar in a professional development

Bilaga 18 Developing the design of a role-play

Bilaga 19 Uppgiftsprotokoll

Med rätt att utmanas – i en skola för alla

En rapport av ett skolutvecklingsprojekt om undervisning för elever med särskild begåvning, med fokus på matematik.

Huvudmålet med projektet har varit att utvidga lärares undervisning så att alla elever blir inkluderade i skolans verksamhet, såväl socialt som pedagogiskt. Det vill säga att åstadkomma en skola där alla elever blir utmanade, så som de har rätt till, i en skola för alla. Förhoppningen är att andra huvudmän, skolor och lärare ska kunna använda sig av denna rapport för att kunna utveckla sina verksamheter till att göra undervisningen tillgänglig även för elever med särskilt begåvning.

Metod

Genom att grundskolelärare med behörighet i matematik med rektors stöd ansökte om att delta i projektet, lades grunden för ett kollegialt samarbete. Femton lärare deltog under projektets två aktiva år 2015–2017. Genom att delta vid föreläsningar, strukturerade diskussioner och workshops utvecklades deltagarnas kompetens i att koppla teorier till sin praktiska verksamhet. Genom att parallellt arbeta med att analysera och utveckla matematikuppgifter förbättrades lärarnas kompetens i att anpassa material så att även elever med särskild begåvning nu kan få ledning i sin kunskapsutveckling.

Mer specifikt kan sägas att lärarna utvecklade, prövade och utvärderade verktyg inom ämnet matematik som är speciellt lämpliga för elever med särskild begåvning i matematik. I huvudsak handlade det om att skapa, utvärdera och definiera uppgifts-/problemtyper samt att utveckla undervisningsmetoder som fungerar i en svensk klassrumsmiljö.

Genomförande

I denna rapport beskrivs den tvåårigа fas som lärarna var aktivt delaktiga i. Den föregicks av en planeringstid och åtföljdes av en avslutningstid, där till exempel denna rapport har skrivits. Den totala projekttiden omfattade tre år.

En inbjudan till att delta i projektet gick ut till alla grundskolor inom Karlstads kommun via rektorer och förstelärarnätverk, se Bilaga 1. I inbjudan var tiden för lärarnas delaktighet i projektet uppskattad för respektive läsår. För att delta var lärarna tvungna att ha behörighet i att undervisa matematik för de årskurser de undervisade i. Läraren behövde också ha rektors underskrift som intyg på att hon eller han gav stöd till deltagande, se Bilaga 2. Projektet var upplagt med ett antal fysiska träffar per läsår med arbete däremellan för varje deltagande lärare.

Under varje träff växlade arbetsformerna mellan föreläsningar, diskussioner och workshops. Samtliga arbetsformer varierade i sin tur mellan storgrupp och mindre eller små grupper. Lärarna var uppdelade efter de årskurser de undervisade i. Det innebar fyra mindre grupper, där en grupp utgjordes av lärare med undervisning i åk 7–9, en annan grupp med ärare i åk 4–6, medan två grupper bestod av lärare med undervisning i åk 1–3. I en av dessa sistnämnda grupper fanns lärare som samtliga arbetade på samma skola.

Första läsåret ägnades åt att bygga upp en teoretisk kunskap kring särskild begåvning och mer specifikt kring särskild begåvning i matematik. Utöver det analyserades och utvecklades ett antal matematikuppgifter som implementerades under det andra läsåret. Första läsåret omfattade åtta heldagsträffar med mellanliggande arbete på egen hand för respektive lärare.

Andra läsåret implementerade lärarna de utvecklade uppgifterna i sina klasser. De fyra lärargrupperna ansvarade vardera för fyra uppgifter som implementerades i tre interventioner per uppgift, med mellanliggande analyser och vidareutveckling. Andra läsåret omfattade en heldagsträff och fyra halvdagsträffar, med mellanliggande arbete på egen hand i de egna klassrummen.

Projektets olika delar, innehåll och hur vi arbetat med innehållet, beskrivs mer ingående under deras respektive kapitel i rapporten.

Rapporten är tänkt att kunna användas som en vägledande guide för andra pedagogiska verksamheter som vill utveckla arbetet att undervisa elever med särskild begåvning i heterogena klassrum. Viktigt att poängtera är att de deltagande lärarna läste stora mängder litteratur, för att ta del av och bidra till projektets innehåll och resultat. Läsaren av denna rapport uppmuntras därför att läsa den litteratur som ingått i projektet. Rapporten inleds med en kort beskrivning av mål för de olika träffarna i projektet, därefter beskrivs de olika delarna till största del i kronologisk ordning, sist ges referenser till den litteratur som ingått i projektet, samt länkar i de fall det finns. Bilagorna utgör en viktig del av rapporten och hänvisningar till dessa finns i texten.

Beskrivning av projektets upplägg och delmål

De olika träffarna och deras mål.

Läsår 1

- Träff 1 – Särskild begåvning
    - Att förstå skillnader mellan styrkor, begåvning och talang, och att kunna särskilja dessa hos några av dina elever.
    - Att kunna identifiera några kognitiva och affektiva karakteristiska hos begåvade elever bland några av dina elever.
    - Att kunna utvärdera influensen av inre och yttre katalysatorer i lärandet hos elever med särskild begåvning i ditt klassrum eller i din skola.
- Träff 2 – Identifikation
    - Att förstå syftet med att identifiera elever.
    - Att förstå skillnaden mellan objektiva och subjektiva identifikationsverktyg och när respektive verktyg bör användas.
    - Att bli medveten om olika verktyg som finns tillgängliga för att identifiera elever.
    - Uppskatta behovet av multipla identifikationskriterier.
    - Träna på att analysera uppgifter.
- Träff 3 – Social och emotionell utveckling
    - Känna till hur elever med särskild begåvning kan skilja sig åt i sin affektiva utveckling jämfört med sina jämnåriga kamrater.

    - Kunna identifiera beteenden som kan ha att göra med att elever med särskild begåvning döljer sina förmågor för att uppnå ”kompisacceptans”.
    - Känna till ”over-excitabilities” som kan indikera särskilt begåvning.
- Träff 4 – Underpresterare
    - Förstå att definitioner av underprestation är nödvändiga om vi ska kunna upptäcka elever med akademisk särskild begåvning som underpresterar i våra klassrum.
    - Skapa en medvetenhet kring några aspekter som kan orsaka underprestation hos elever med särskild begåvning.
    - Förstå att akademisk underprestation är vanlig bland elever med akademisk särskild begåvning och att detta ofta är svårt att identifiera speciellt hos elever från kulturella minoritetsgrupper och hos elever med låg socioekonomisk bakgrund.
    - Förstå att vissa karakteristika och uppträdanden hos elever med särskild begåvning kan ge ledtrådar för att underlätta deras identifiering.
- Träff 5 – Differentierad undervisning
    - Kunna förklara definitioner och syfte med differentiering i relation till elever med särskild begåvning.
    - Kunna analysera inslag av differentiering som finns i ett arbetsområde.
    - Kunna beskriva processen i kursplans komprimering.
    - Kunna utveckla ett resultatbaserat förtest för ett för läraren aktuellt arbetsområde.
- Träff 6 – Extra aktiviteter
    - Diskutera olika grupperingar och acceleration
    - Reflektera över vilka extra aktiviteter som redan nu finns att tillgå samt hur dessa kan involveras i ordinarie undervisning för att gynna elever med särskild begåvning.
    - Reflektera över allt material – vad och hur kan detta implementeras i aktuell undervisning?
    - Komma fram till hur en lektionsplanering som syftar till att differentiera arbetet för eleverna kan se ut, med fokus på att elever med särskild begåvning ska bli utmanade?
- Träff 7 – Utveckla uppgifter inför läsår två
    - Träna på att implementera uppgift med utökade frågor.
    - Göra översiktlig planering för de uppgifter som ska implementeras nästa läsår.
- Träff 8 – Utveckla uppgifter inför läsår två
    - Finslipa uppgifterna som ska implementeras nästa läsår.
    - Träna på en Mattegömma
    - Träna på att presentera uppgifterna.
    - Planera nästa läsår.

Läsår 2

- Träff 9 – konferens och möte med experter

    - I form av mindre samtal och föreläsning - ta del av internationella experters erfarenheter och kunskap kring undervisning av elever med särskild begåvning.
- Träff 10 – Utvärdering efter första interventionen
    - Diskutera hur de olika uppgifterna fungerat vid implementeringen
    - Göra eventuella justeringar i uppgiften, och/eller komplettera med didaktiska och pedagogiska kommentarer.
    - Diskutera uppgiftsprotokollet och utveckla strategier för att kunna svara på frågorna.
    - Diskutera och reflektera kring hur man kan stimulera elevernas högre tänkande. Koppla till Sheffields utökade frågor och öppna inställning till problemlösning.
- Träff 11 – Utvärdering efter andra interventionen
    - Dela erfarenheter av implementeringen av uppgifterna under period 2.
    - Genomföra eventuella ändringar och kompletteringar i uppgifterna inför period 3.
- Träff 12 – Utvärdering efter tredje och sista interventionen
    - Dela erfarenheter av implementeringen av uppgifterna under period 3.
    - Genomföra eventuella ändringar, kompletteringar i uppgifterna inför slutrapport.
- Träff 13 – Avslutning
    - Dela erfarenheter av projektet med inbjudna skolledare i kommunen

Material och litteratur

Som bas för kunskapsinhämtning har vi i projektet använt oss av ett australiensiskt online-material, utvecklat och administrerat av University New South Wales, UNSW, i Australien, för lärare ämnat till fortbildning kring ämnet undervisning av elever med särskild begåvning. Länk till materialet finns i referenslistan. I rapporten kallas materialet för GERRIC-materialet, GERRIC- materialet är indelat efter åldrarna på de elever som undervisas. Det finns tre nivåer:

- Early ages – tänkt för motsvarigheten till förskolepedagoger.
- Primary – tänkt för motsvarigheten till lärare i åk F – 6.
- Secondary – tänkt för motsvarigheten till lärare i åk 7 – 9 och i många fall även för gymnasielärare.

I detta skolutvecklingsprojekt har enbart grundskolelärare deltagit, varför endast nivåerna Primary och Secondary använts. GERRIC-materialet är uppbyggt i sex moduler och de första sex träffarna under läsår 1 följde modulernas upplägg. Till varje modul finns förutom grundmaterialet ett tillhörande specialist- och expertmaterial. Allt hittas via länken i referenslistan.

Utöver GERRIC-materialet användes litteratur som specifikt berör det svenska skolsystemet, bland annat Skolverkets (2015) stödmaterial för att arbeta med elever med särskild begåvning och Sveriges kommuner och landstings, SKLs, handlingsplan för särskilt begåvade barn och elever (2016). Vi har även använt oss av en relativt stor mängd litteratur specifikt gällande matematisk särskild begåvning. Litteraturen har legat till grund för träffarna och lärarna har

inför varje träff förberett sig genom att läsa en relativt stor mängd utvald litteratur. I referenslistan finns i vissa fall en kommentar kring vilka träffar i projektet just den litteraturen är kopplad till. Observera att all litteratur ska läsas med kritiska ögon. Viss litteratur är vald till projektet just för att kritiskt granska och jämföra olika varianter.

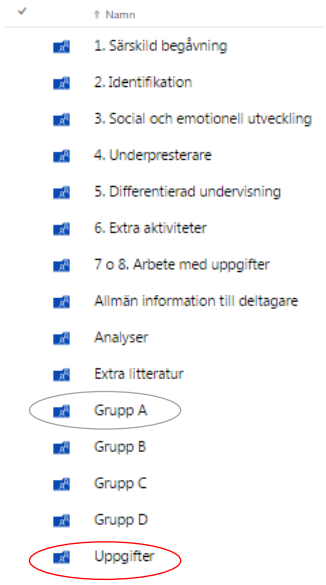
Redogörelse för projektets innehåll

I respektive kapitel finns diskussionsfrågor och en kort beskrivning av de workshops som använts vid de olika träffarna. Vi vill poängtera att för att till fullo kunna ta del av denna rapport rekommenderas läsaren läsa den litteratur som de deltagande lärarna läste inför respektive träff. (Se respektive kapitel och referenslistan)

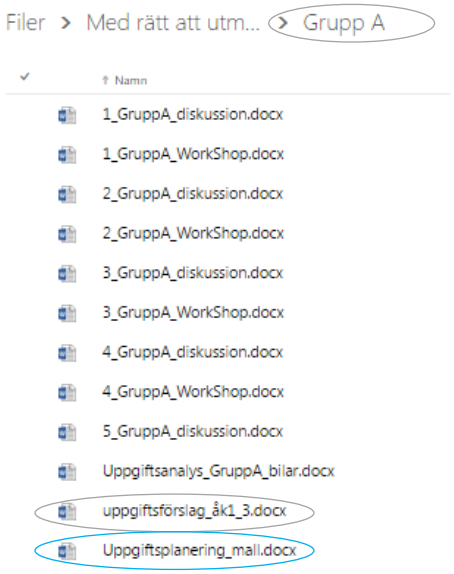
Diskussionsfrågor, workshops och andra aktiviteter för detta projekt har konstruerats i samarbete med forskare inom matematikdidaktik vid Karlstads Universitet.

Att arbeta online

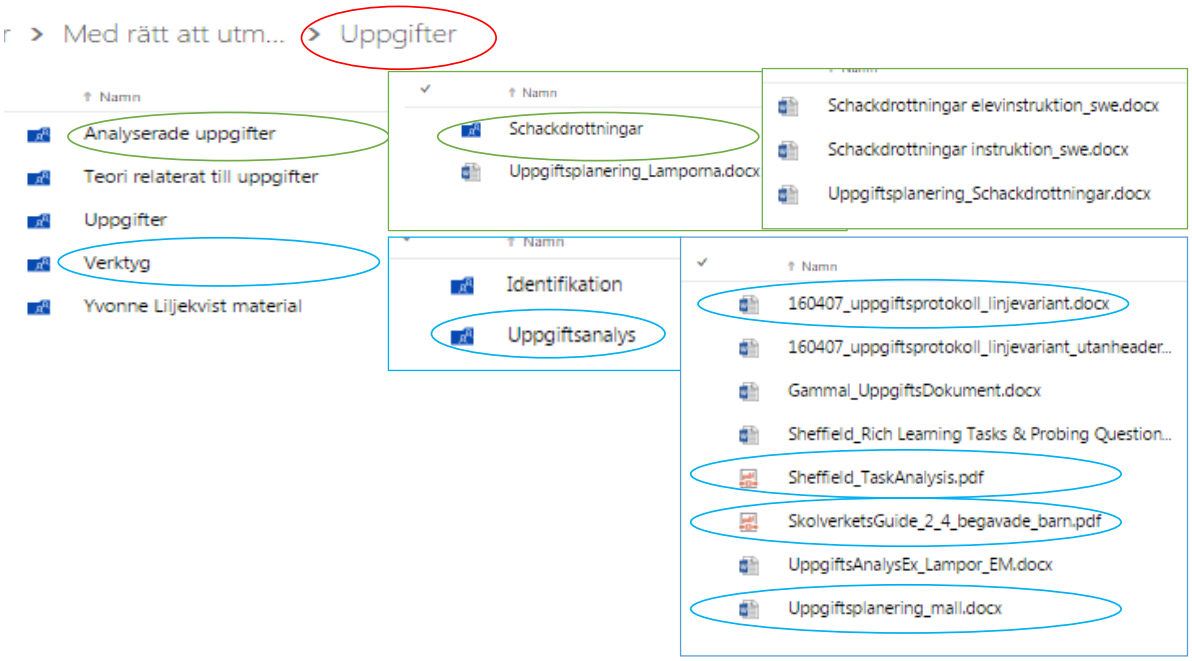
I projektet skapades en onlinebaserad samarbetsyta, där material som lärarna skulle läsa placerades. Vidare placerades där föreläsningsunderlag i form av powerpointbilder och extra litteratur. Varje grupp av lärare hade också sina egna arbetsrum i samarbetsytan, och i varje arbetsrum fanns dokument med diskussionsfrågor och workshops förberedda inför varje träff. Vid träffarna skrev lärarna direkt i dessa dokument, och de blev på så sätt tillgängliga för alla i projektet. Alla gruppers anteckningar blev även sparade på samma ställe, vilket möjliggjorde för projektledaren att utvärdera respektive träff inför planeringen av nästa träff. Figur 1, 2 och 3 visar hur strukturen på samarbetsytan såg ut på olika nivåer.



Figur 1 Övergripande struktur på samarbetsytan.



Figur 2 Struktur på lärarnas online-grupprum.



Figur 3 Struktur i mappen om matematikuppgifter.

Träff 1 – Särskild begåvning

Inför den första träffen läste deltagarna modul 1 i GERRIC-materialet, antingen Primary eller Secondary, beroende på vilka klasser de deltagande lärarna undervisade i. Denna modul beskriver och teoretiserar innebörden av särskild begåvning och det ges exempel på hur man kan uppfatta elever med särskild begåvning.

Första träffen inleddes med en föreläsning som lyfte fram särskild begåvning i allmänhet. En annan föreläsning på samma träff riktade uppmärksamheten på teorier kring matematisk särskild begåvning. Litteratur som dessa föreläsningar var baserade på, finns angiven i referenslistan.

I GERRIC-materialet används Gagnés definition (2003) av begåvning och talang. Den bygger på att ca 10 procent av populationen har en medfödd särskild begåvning inom en eller flera domäner. Inre och yttre faktorer kan påverka begåvningens utveckling positivt eller negativt. Begåvningen innebär att individen har en större potential än jämnåriga till att utvecklas inom domänen. I modellen nämns också att 10 procent av en population räknas som talanger inom respektive domän och att det är de 10 procent bäst presterande inom den domänen i förhållande till t.ex. jämnåriga.

Enligt den litteratur som lästs och diskuterats lyftes ett antal karakteristika upp som man kan notera hos individer med särskild begåvning, oavsett vilken domän begåvningen ligger i. Lärare bör vara medvetna om och observanta på dessa karakteristika hos elever. Lärarens observationer är enligt litteraturen en viktig faktor i identifikationsprocessen av elever med särskild begåvning.

Några av de karakteristika som nämns i litteraturen (t.ex. Cosmovici Idsøe, 2014; UNSW, 2004; Silverman, 2016) är listade nedan. Observera att det kan vara skillnad mellan högpresterande och särskilt begåvade.

Karakteristika för elever med särskild begåvning

- Plötsligt ”glimmar till”, blir ”som fångade” av något specifikt (ofta udda) ämne eller idé även om eleven kan verka närmast apatisk vid andra tillfällen,
- Förstår och kan använda abstrakta symboler väldigt tidigt,
- Ställer reflektiva och undersökande frågor,
- Använder en rik vokabulär,
- Absorberas av arbete som intresserar dem,
- Har ovanligt snabb inlärningshastighet,
- Ogillar långsamt arbete,
- Har välutvecklat minne,
- Resonerar på sätt mer vanligt hos äldre elever,
- Föredrar individuellt arbete.

Affektiva karakteristika

Elever med särskild begåvning visar ofta upp följande affektiva karakteristika. En elev kan vara särskilt begåvad även om eleven inte har alla karakteristika.

- Emotionell intensitet
- Rättvisekänsla

- Känslomässig inlevelseförmåga
- Frustration
- Välutvecklad känsla för humor
- Äldre vänner
- Vänskap
- Acceptans
- Perfektionism

Särskild begåvning i matematik

Karakteristika hos elever med särskild begåvning härleds inte till någon specifik ämnesdomän i litteraturen. Vi tolkar detta som att dessa karakteristika kan bidra till att avgöra om en elev har en särskild begåvning och därmed behöver en mer utmanande undervisning än de flesta eleverna inom något eller några ämnen. I projektet har vi specialiserat oss på matematisk begåvning och inom detta område har vi fokuserat på litteratur i huvudsak baserat på två forskare, Krutetskii och Sheffield. Skolverket hänvisar till Krutetskii (1976) i den ämnesdidaktiska matematikdelen i stödmaterialet för elever med särskild begåvning. I Bilaga 3 framgår vilka förmågor Krutetskii menar att elever med särskild begåvning i matematik anses uppvisa, när de befinner sig i en matematisk aktivitet.

Den andra forskaren är Sheffield (2003). Även hon nämner ett antal förmågor som går att notera hos elever med särskild begåvning i matematik, se Bilaga 4. Sheffield poängterar att dessa förmågor är något som alla elever, oavsett begåvning, behöver träna. I litteratur om matematisk särskild begåvning nämns ofta vikten av att använda sig av utmanande uppgifter för att stimulera dessa elever. Sheffield har angivit ett antal kriterier som en uppgift bör ha för att utmana och stimulera alla elever, speciellt de särskilt begåvade. Sheffield kallar sådana uppgifter för rika lärande uppgifter (Rich learning tasks), se Bilaga 5. I projektet har vi arbetat med att analysera uppgifter för att undersöka om och hur uppgifter uppfyller de kriterier som nämns av Krutetskii respektive Sheffield. Andra forskare (t.ex. Benölken, 2015; Fuchs & Käpnick, 2009, Nolte, 2015) som bland annat förtydligat och förstärkt Krutetskii och Sheffield har också lyfts fram i projektet.

Uppgifter i matematik för elever med särskild begåvning i matematik

Uppgifter som stimulerar de matematiskt särskilt begåvade (Benölken, 2015) kännetecknas av att de

- Är komplexa,
- Bör attrahera elevernas glädje och nyfikenhet för problemlösning,
- Har ett matematiskt innehåll som ska vara tillräckligt för att varje elev ska kunna upptäcka intressant fakta, där det också finns ett matematiskt djup,
- Är möjlig att angripa med olika metoder, olika lösningsvägar och olika presentationsformer,
- Gör det möjligt att finna andra problem som härrör från det ursprungliga och som kan utforskas av eleverna.

För att kunna bilda oss en uppfattning om uppgiften uppfyller de kriterier som önskas av en uppgift lämplig för elever med särskild begåvning i matematik, har vi tränat på att analysera uppgifter enligt Krutetskiis förmågor, Bilaga 3 och Sheffields kriterielista, Bilaga 5.

Diskussionsfrågor

Storgrupp

I relation till matematisk särskild begåvning diskuterades följande frågor, hämtade från Nolte (2015):

- Hur kan lärare möjliggöra lärandemiljöer anpassade för att utveckla matematiska förmågor i det ordinarie helklassrummet?
- Finns det skillnader mellan tillvägagångssätten i det ordinarie klassrummet jämfört med t.ex. gruppundervisning speciellt för särskilt begåvade (*pull out programs)*?
- Vilka karaktäristikor har problem som är lämpliga för att utmana elever särskilt begåvade i matematik?
- Kan dessa problem användas i den ordinarie klassrumsmiljön?
- Ska dessa problem framställas som komplexa problem (en helhet) eller ska vissa kognitiva komponenter för problemlösning tränas separat (stycka upp problemen)?
- Vilka möjligheter finns det med:
    - tävlingar?
    - lärandemiljöer baserade på naturlig differentiering?
    - forskningsliknande problem där det finns möjlighet till progression?

Gruppdiskussion

Gruppdiskussionen syftade till att gemensamt relatera till den egna verksamheten genom att reflektera kring den lästa litteratur och de föreläsningar deltagarna lyssnade på tidigare på dagen.

Frågorna är ett stöd för gruppdiskussionen.

Styrkor, begåvning, talang

- Har du/har du haft elever vars styrka är matematik? Hur motiverar du det?
- Har du/har du haft elever som är särskilt begåvade i matematik? Hur motiverar du det?
- Har du/har du haft en elev som är/var en matematisk talang? Hur motiverar du det?

Workshop

Workshopen syftade till att gemensamt reflektera över lektionsplaneringens möjlighet till att ge elever tillfällen att visa sin potential. I workshopen fokuserades främst på det omgivningen erbjuder eller inte erbjuder, i GERRIC- materialet kallat miljökatalysatorer.

I workshopen gavs ett antal punkter som stöd för en lektionsplanering, eller en uppgiftsplanering, med fokus på att ge elever med särskild begåvning möjlighet att visa sin matematiska potential.

- Hur tror ni att ert val ger möjlighet för elever särskilt begåvade i matematik att visa sin potential?
- Beskriv hur ni tänkt göra, när ni testar er idé i klassrummet.

- Motivera hur ni tänker kring att det valda sättet ger möjlighet för elever särskilt begåvade i matematik att visa sin potential?

Koppla gärna era idéer till Krutetskii och/eller Sheffield.

I workshopen kan det vara bra att utgå från en lektion eller uppgift som deltagarna är vana vid. Utgå till exempel från läromedel som redan används i undervisning, eller av annat känt material.

Träff 2 - Identifikation

Inför den andra träffen läste deltagarna modul 2 i GERRIC-materialet, antingen Primary eller Secondary beroende på vilka klasser de deltagande lärarna undervisade i. Denna modul beskriver och teoretiserar identifiering av elever med särskild begåvning.

Andra träffen innehöll en föreläsning som kopplade till det lästa materialet. J. Professor Ralf Benölken, från universitetet i Münster, gav en Skypeföreläsning kring identifiering av matematiskt begåvade elever. Han kopplade identifieringsfrågan bland annat till ett projekt som involverar matematikklubbar i kombination med lärarutbildning vid universitetet i Münster, Tyskland, *Mathe für kleine Asse*.

Identifiering av särskild begåvning

I GERRIC-materialet (UNSW, 2004) poängteras vikten av att använda både subjektiva och objektiva identifikationsmetoder såväl som en blandning av kvantitativa och kvalitativa mått vid identifikationsprocessen. Inom projektets ram hade vi inte möjlighet eller kompetens att införliva standardiserade, objektiva mätmetoder som till exempel mäter kognitiv förmåga. I den identifikationsprocess vi arbetade med låg lärarprofessionen och lärarens kunskap om särskild begåvning i fokus. Det vill säga, lärarens subjektiva bedömning, förutsatt att läraren har kunskap om särskild begåvning och i detta fall även om matematisk särskild begåvning.

I projektet diskuterade vi olika typer av identifikationslistor: elev-, föräldra-, och lärarlistor, självskattningslistor och kompisnominering. De olika listorna finns dels i modul 2 i GERRIC-materialet, dels som Bilaga 6 – 8. Listorna i Bilaga 6 – 8 är utvecklade av danska forskare inom särskild begåvning och finns publicerade av Nissen (2016) där även viss ledning ges kring hur de kan tolkas. Viktigt att poängtera att listorna kräver kunskap om särskild begåvning för att kunna tolkas.

Identifiering av matematisk särskild begåvning

För att kunna identifiera matematisk begåvning behöver elever befinna sig i en matematisk aktivitet, t.ex. i arbete med matematikuppgifter. Genom att eleverna är i arbete med en lämplig uppgift ökas sannolikheten att kunna identifiera egenskaper som är karakteristiska för elever med särskild begåvning i matematik. Det är rimligt att anta att detta oftast inte går att göra vid ett enskilt tillfälle, vilket också styrks av bland annat GERRIC-materialet. I elevens arbete med matematik valde vi i detta projekt att lärarna skulle försöka observera de karakteristika som nämns av Krutetskii (1976) och Sheffield (2003).

Utöver detta kan man som lärare även studera elevens arbetssätt (Fuchs & Käpnick, 2009; Sheffield, 2003).

Egenskaper att iaktta hos eleven

- Engagemang i uppgiften
- Förkortat resonemang,
- ”Snabba” generaliseringar,
- Matematiskt minne,
- Matematisk kreativitet; flyt, flexibilitet, originalitet, undersökande,
- Nyfikenhet och uthållighet; notera t.ex. koncentrationsgrad och ihärdighet,
- Hög mental aktivitet,

- Glädje,
- Tillit på egna förmågor,
- Samarbete med andra genom uppgiften.

Gruppdiskussion

Gruppdiskussionen syftade till att gemensamt relatera till den egna verksamheten genom att reflektera kring den lästa litteraturen och de föreläsningar deltagarna hade tagit del av tidigare på dagen.

Diskussionsfrågor

- Varför ska eleverna identifieras?
- Hur ska de identifieras?
- Vad är det som ska identifieras?
- Finns det något ni tycker måste vara med i en identifikationsprocess?
- Finns det något ni tycker verkar onödigt/överflödigt att ha med?
- Finns det något ni föredrar, respektive vill undvika?
- Räcker det med att enbart fokusera på den ”matematiska” definitionen?

Enligt litteraturen är det viktigt att lärare tränar på att arbeta med identifikationsprocesser. Lärarna i projektet valde därför ut någon/några identifikationslistor/processer som de skulle studera extra mellan Träff 2 och Träff 3.

Workshop

Workshopen syftade till att ge träning i att analysera uppgifter med avseende på de kriterier Sheffield anger som viktiga för att vara en *rik lärande uppgift*. I dokumentet *Guide till att analysera uppgifter* (Bilaga 5) finns kriterierna beskrivna med kommentarer från de erfarenheter som en tidigare forskningscirkel om matematisk särskild begåvning resulterade i (Mellroth et al., 2015).

Vid analysen av en uppgift, diskutera:

- Uppfyller uppgifterna kriterierna?
    - Om nej: vad är det som saknas? Kan ni förändra uppgiften så att även dessa kriterier kommer med? Är det nödvändigt?
- Vilka egenskaper hos elever med särskild begåvning i matematik tror ni att ni kan upptäcka genom arbete med uppgiften?
- Hur tror ni att uppgiften kommer att fungera i klassrummet?
- Vilket centralt innehåll täcker uppgiften?
- Vilka förmågor enligt lgr 11 tror ni att ni kan mäta genom uppgiften? Håll skillnad på de förmågor som ligger till grund för kunskapsbedömning enligt lgr 11 och de förmågor Krutetskii beskriver.

Träff 3 - Social och emotionell utveckling

Inför den tredje träffen läste deltagarna modul 3 i GERRIC-materialet (UNSW, 2004), antingen Primary eller Secondary, beroende på vilka klasser de deltagande lärarna undervisade i. Denna modul beskriver och teoretiserar den sociala och emotionella utvecklingen hos elever med särskild begåvning.

Tredje träffen innehöll en föreläsning som kopplade till det lästa materialet. Dr. Yvonne Liljekvist, vid Karlstads universitet föreläste via Skype kring immitativt och kreativt resonemang, kopplat bland till hennes forskning vid Karlstads respektive Umeås universitet.

Efter att ha läst GERRIC-materialet, reflektera gärna över nedanstående punkter tillsammans med några kollegor.

- I GERRIC-materialet beskrivs hur elever med särskild begåvning kan skilja sig från övriga i kognitiv mognad, hur de knyter vänskapsband och i sin humor. Har ni mött någon elev ni kan relatera till dessa beskrivningar?
- Vad kan ”the forced-choice”-dilemma orsaka för en särskilt begåvad elev?
- Vilka affektiva egenskaper kan vara utmärkande för elever med särskild begåvning? Har ni noterat dessa hos någon elev? Hur har de i så fall visat sig?
- Varför döljer en del elever med särskild begåvning sina förmågor? Vad kan du som lärare göra för att eleven istället ska visa sina förmågor?
- Att ha motivation är viktigt för alla för att prestera bra.
    - Hur kan motivationen till att arbeta med en uppgift påverkas av att en elev är ”task-involvement” eller ”ego-involvement”. Begreppen kan relateras till yttre och inre motivation.
    - Hur kan du som lärare påverka både positivt och negativt?

Gruppdiskussion

Gruppdiskussionen var indelad i två delar, en där identifikationslistor jämfördes och diskuterades, och en där lärarna analyserade uppgifter.

Del 1

Från Träff 2 hade några identifikationslistor studerats extra. Gruppdiskussionen syftade till att, i mindre grupper, diskutera erfarenheter och lärdomar från arbetet med identifikationslistorna för att senare presentera inför alla.

Att diskutera kring identifikationslistorna

- Vilka fördelar har listan?
- Vilka nackdelar har listan?
- Fick ni genom listan någon ny information om era elever?
- Gav listan upphov till nya frågeställningar? Vilka?

Del 2

Vid workshopen i Träff 2 påbörjades ett arbete med att analysera uppgifter enligt Sheffields kriterier för en *rik lärande uppgift*. Gruppdiskussionen syftade till att reflektera kring hur lätt eller svårt det var att förhålla sig till Sheffields olika kriterier.

Analysen i förhållande till kriterierna

Rangordna med hjälp av Post-it lappar kriterierna för en rik lärande uppgift enligt Sheffield (Bilaga 5) utefter hur lätt/bra det gick att utföra analysen.

Ex: 3, 4, 1, ...

där 3 står för *Tillåta eleverna att angripa uppgiften på flera olika sätt, använda olika lösningsstrategier, verktyg, tekniker, modeller, ritningar...*se Bilaga 5.

Notera om och hur ni eventuellt har gjort om uppgifterna.

Gör ett gemensamt tankeexperiment kring uppgiften

- Vilka egenskaper enligt Sheffield (2003) kan upptäckas hos elever med särskild begåvning i matematik, se Bilaga 4.
- Motivera varför/varför inte ni tror uppgiften går att använda i klassrummet.
- Vilket centralt innehåll tas upp via uppgiften.

Workshop

Förkunskaper som förväntas finnas inför träff 3:

- Vad som är utmärkande för elever med särskilt begåvade i matematik; enligt Krutetskii och Sheffield.
- Aspekter som enligt Gagné och Sheffield är viktiga att tänka på för att stötta och stimulera begåvade elever.
- Kriterier hos en rik lärande uppgift, enligt Sheffield.
- Kunskap om en öppen inställning till problemlösning, enligt Sheffield.
- Kunskap om frågeställningar lämpliga för att utveckla det matematiska lärandet hos elever, enligt Sheffield och material från matematiklyftet, (t.ex. Hagland & Taflin, 2014; Larsson, 2013; Taflin, m.fl., 2014; Thornberg, 2013) och Bilaga 9.
- Kunskap kring hur en lärare kan uppmuntra till ”task-involvement”, enligt GERRIC modul 3.
- Kunskap kring hur elever som är ”ego-involved” kan upptäckas, enligt GERRIC modul 3.
- Kunskap kring Force-choice dilemmat – elever som eventuellt gömmer sin begåvning, enligt GERRIC modul 3.

Målet med workshopen var att fortsätta utveckla uppgifter på samma sätt som vid Träff 2. Det långsiktiga målet var att ha analyserade och utvecklade uppgifter klara att implementera i slutet av Träff 8.

Det är viktigt att motivera varför en uppgift tros vara lämplig, men också viktigt att motivera varför någon uppgift eventuellt inte anses lämplig. För att skapa ett gemensamt arbetssätt

strävade vi efter att hitta en struktur och en passande dokumentation. I slutet av projektet hade vi utvecklat ett fungerande arbetssätt som vi presenterar här.

Vid analysen av uppgifterna diskuterade lärarna punkt 1 till 8

- Vilka matematiska förmågor enligt Krutetskii, F1 – F8, se del 2.4 i Skolverket (2015) ger uppgiften möjlighet att studera hos eleven?
    - Hur tror ni att detta kommer visa sig genom elevernas arbete?
- Vilka kriterier för en rik lärande uppgift (Bilaga 5) uppfyller den valda uppgiften?
    - Hur tror ni att dessa kriterier kommer synliggöras genom elevernas arbete?
    - Om något/några kriterier saknas, går det att göra om uppgiften så att dessa också uppfylls? Hur? Varför inte?
- Ge något/några exempel på hur eleven kan ledas till att ta sig genom ”den öppna inställningen till problemlösning” genom arbetet med uppgiften, se Bilaga 10.
- Gör ett tankeexperiment på hur frågeställningar (enl. Sheffield, se Bilaga 9) kan leda till djupare kunskap hos eleven samt uppmuntra till ”task-involvment”. *Ni kan t.ex. spela rollspel här lärare/elev.*
- Gör ett tankeexperiment på hur en elev som är ”ego-involved” skulle arbeta med uppgiften. *Ni kan t.ex. spela rollspel här lärare/elev.*
- Gör ett tankeexperiment på hur en elev som vill gömma sin begåvning skulle arbeta med uppgiften. *Ni kan t.ex. spela rollspel här lärare/elev.*
- Vilka centrala innehåll behandlas genom uppgiften? Vilka förmågor enligt lgr 11 kan mätas genom uppgiften?
- Hur tror ni att uppgiften kommer att fungera i klassrummet? Kan alla elever arbeta med den samtidigt som den erbjuder utmaning för elever med särskild begåvning?

Träff 4 - Underpresterare

Inför den fjärde träffen läste deltagarna modul 4 i GERRIC-materialet, antingen Primary eller Secondary, beroende på vilka klasser de deltagande lärarna undervisade i. Denna modul beskriver och teoretiserar underprestation hos elever med särskild begåvning.

Fjärde träffen innehöll en föreläsning som kopplade till det lästa materialet. Professor Linda Sheffield gav en Skypeföreläsning kring hur man kan arbeta för att få alla elever att utveckla sina matematiska förmågor, kopplad bland till hennes projekt och forskning vid Northern Kentucky University, USA.

Underprestation

När lärare upptäcker att underpresterare är särskilt begåvade ökar ofta lärarnas förväntningar på dessa elever. Det är visat att höjda lärarförväntningar leder till kraftigt förbättrade studieresultat för underpresterande elever.

I GERRIC-materialet ges några förslag på hur man kan identifiera underpresterare som är särskilt begåvade. Ett sätt är att till exempel testa kognitiv förmåga. Enligt litteraturen kan en elev inte fuska sig till höga resultat. Visar dessa test högt ska det alltså tolkas som en indikation på att eleven kan vara särskilt begåvad. Samma sak gäller för standardiserade normalfördelade domänspecifika ämnestest. Det kan dock vara så att eleven undermedvetet eller medvetet av olika anledningar presterar lågt på dessa test. För att testa en elevs inlärningsförmåga, oavsett var eleven ligger prestationsmässigt nämns *Dynamisk testning*.

En dynamisk testning går, lite förenklat, ut på att man genomför ett förtest, därefter genomförs någon slags intervention som avslutas med ett efter-test. Därmed ges ett mått på elevens inlärningsförmåga. Om interventionen är väl genomtänkt för dess syfte, kommer några av de begåvade underpresterande eleverna som är svåra att upptäcka att identifieras här. För att läsa om olika orsaker till att eleven underpresterar se modul 4 i GERRIC-materialet.

Gruppdiskussion

Gruppdiskussionen syftade till gemensam reflektion kring hur man kan upptäcka underpresterande elever med särskild begåvning i klassrummen. Gruppdiskussionerna guidades av följande frågor.

- Börja enskilt med att tänka på någon elev som du misstänker kan vara en begåvad underpresterare.
- Hur skulle du beskriva eleven? Dess beteende och dess personliga egenskaper?
- Använd matrisen av Betts and Neihart, se modul 4 i GERRIC-materialet, för eleven.
- Jämför och diskutera. Vilka typer av underpresterare, enligt matrisen, hittar ni?
- Även om inte ”osynliga” underpresterare nämns i matriserna – vilken typ tror ni är vanligast bland dem?

Workshop

Välj en mattegömma eller en annan uppgift. Analysera den på samma sätt som vid Träff 2 och 3.

Analysera uppgiften efter Sheffields kriterier för en rik lärande uppgift, Bilaga 5, samt efter vilka matematiska förmågor, enligt Krutetskii, uppgiften ger möjlighet att studera hos eleven, se Bilaga 3.

Ett exempel på en påbörjad analys, av en uppgift kallade Lamporna, finns i Bilaga 11. I Bilaga 12 finns exempel på hur vi arbetade för att skapa utökade frågor till de uppgifter vi analyserat, även här till uppgift Lamporna.

Träff 5 – Differentierad undervisning

Inför den femte träffen läste deltagarna modul 5 i GERRIC-materialet, antingen Primary eller Secondary, beroende på vilka klasser de deltagande lärarna undervisade i. Denna modul beskriver och teoretiserar differentierad undervisning.

Femte träffen innehöll en föreläsning som kopplade till det lästa materialet.

Differentiering

En differentierad kursplan adresserar elevers olika lärstilar och olika inlärningshastigheter i såväl heterogena som nivågrupperade klassrum. Syftet med att differentiera undervisningen är att maximera varje elevs kunskapsutveckling. I praktiken handlar det om att erbjuda flera olika typer av undervisning. Det handlar inte om en individualiserad undervisningsmetod för var och en av de 20–30 eleverna. I en differentierad undervisning erbjuder läraren 2–4 olika ”lärsituationer”, eller att eleven ges möjlighet att göra egna val (se modul 5 i GERRIC-materialet). I GERRIC-materialet framhålls att undervisningen bör differentieras med avseende på fyra aspekter: Innehåll, Arbetssätt, Resultat och Lärmiljö, översatt till svenska Bilaga 13.

elever med särskild begåvning behöver instruktioner och ledning i sitt lärande, men de behöver troligtvis inte samma mängd repetition och stöd som andra elever. De särskilt begåvade behöver mer abstrakt och komplext material och de behöver oftast kortare tid på sig för att bygga kunskapsbasen.

I modul 5 nämns användandet av förtest som viktig för att undersöka vilka elever som redan behärskar det som kommande moment ska behandla. I projektet undersökte vi om Diamantmaterialet (Skolverket, 2017) kan användas i detta syfte. GERRIC-materialet lyfter också upp att man kan använda sig av så kallade utökade frågor för att differentiera undervisningen. Dessa utökade frågor kan koppla till att träna ett högre tänkande enligt t.ex. Blooms reviderade taxonomi. Vid träff 5 tränade vi också på att konstruera utökade frågor med syfte att träna elevens högre tänkande, se Bilaga 12.

Gruppdiskussion

Skollagen kräver att eleverna ska ges ledning att fortsätta utvecklas i sin kunskap. Kunskapskraven ska alltså inte vara ett tak som säger ”Hit men inte längre”.

Enligt litteraturen i GERRIC-materialets modul 5, rekommenderas förtest som en metod för läraren att undersöka vad eleverna kan om det område som ännu inte är behandlat. Ett förtest bör testa slutmålet i det kommande tänkta området. En elev som behärskar ca 85% eller mer av förtestet bör erbjudas en utökad kursplan inom området. Förtest bör gå snabbt att göra, och man bör helst använda minst två olika typer av förtest.

Diskutera följande

- Använder ni er av förtester idag?
    - Om förtest används, berätta hur ni gör och vad ni testar.
- Välj ett lämpligt mindre område i matematiken, kopplat till något centralt innehåll.
- Titta på kunskapskraven för respektive årskurs, vad är rimligt att förvänta sig av normaleleven.

Diskutera möjligheterna att använda Diamantmaterialet som förtest

Utgå till exempel från det centrala innehållet:

- För åk 1-6: Hur (enkla - i åk 1–3) mönster i talföljder och geometriska mönster kan konstrueras, beskrivas och uttryckas.
- För åk 7–9: Innebörden av variabelbegreppet och dess användning i algebraiska uttryck, formler och ekvationer.

Diamantmaterialets koppling till dessa centrala innehåll hittas bland annat i avsnittet Talmönster och Algebra, TA. Diagnoserna för Talmönster betecknas TAt3, TAt4 respektive TAt5.

- Studera de tre diagnoserna TAt3, TAt4 respektive TAt5. Reflektera över kunskapsmålet för det centrala innehållet för er undervisningsgrupp. Välj den diagnos som bäst motsvarar kunskapskraven i slutet av åk 3, 6 respektive 9.
- Som ett tankeexperiment genomför ni diagnosen i er klass innan ni börjar gå igenom området som handlar om mönster i talföljder.
- Reflektera över hur normaleleven skulle prestera. Diskutera med varandra.

Vid genomförande av förtester är det vanligt att det finns en oro hos läraren för att svaga elever sänks i självförtroende om de saknar kunskaper i området.

- Reflektera över hur en svag elev skulle reagera på liknande förtest, samt vad du som lärare kan göra för att förmedla meningen med förtest.

Vid genomförande av förtester finns en risk att elever med särskild begåvning inte visar sina kunskaper på mindre avancerade nivåer, då de till exempel kan uppleva testet som tråkigt.

- Reflektera över hur en särskilt begåvad elev skulle prestera. Diskutera med varandra.
- Diskutera fördelar och nackdelar med att ge ett mer avancerat förtest trots misslyckande på det grundläggande. Kan t.ex. TAt5 göras direkt? Vad riskerar man att förlora respektive vinna på det?

GERRIC-materialet rekommenderar att man ska göra flera varianter av förtest.

- Vilken typ av kompletterande förtest kan behövas till Diamantmaterialet?

I GERRIC-materialet ges förslag på att använda tankekartor, Venndiagram och flödesscheman som förtest. Se modul 5 i GERRIC-materialet.

- Diskutera hur liknande material kan användas i era klasser. Hur kan dessa i så fall komplettera Diamantmaterialet?

Träff 6 – Extra aktiviteter

Inför den sjätte träffen läste deltagarna modul 6 i GERRIC-materialet, antingen Primary eller Secondary, beroende på vilka klasser de deltagande lärarna undervisade i. Denna modul beskriver och diskuterar olika typer av extra aktiviteter elever med särskild begåvning kan ha behov av.

Sjätte träffen innehöll en föreläsning som kopplade till det lästa materialet.

I modul 6 lyfts olika aktiviteter och pedagogiska metoder upp för att stödja elever med särskild begåvning i och utanför skolan. Till exempel diskuteras acceleration inom ämnen eller över årskurser, även berikning lyfts som en möjlig pedagogisk metod. Även mentorskap och olika typer av grupperingar diskuteras.

Vid träff 6 diskuterades exempel på hur man kan iaktta egenskaper hos elever med särskild begåvning i matematik kopplat till erfarenheter från en tidigare given forskningscirkel om matematisk särskild begåvning (Mellroth et al., 2015). I forskningscirkeln studerades elevernas upplevelse av arbete med uppgifter ämnade att utmana alla klassen, även de särskilt begåvade, se Mellroth et al. (2015) och Mellroth (2017) även Bilaga 14.

Två av kommunens skolpsykologer deltog också under en timme, då deltagarna i projektet fick möjlighet att ställa frågor kring hur elevhälsan i kommunen arbetar med elever med särskild begåvning. Trots att båda hade 10–20 års erfarenhet av att arbeta i kommunens elevehälsoorganisation hade ingen av dem hört att frågan kring elever med särskild begåvning lyfts tidigare. Detta möte gav upphov till en fortsatt och positiv kommunikation med skolpsykologerna.

PriMa-projektet i Hamburg, Tyskland, ett konkret exempel på en extra aktivitet

I Hamburg har i snart 20 års tid matematikklubbar för elever med särskild begåvning i matematik funnits. Alla barn som går i årskurs 1 i Hamburgs stad bjuds in för att delta i verksamheten. Cirka 500 barn kommer för att pröva och av dessa väljs 50 barn ut som får delta i projektet som drivs av Hamburgs universitet via professor Marianne Nolte. Krutetskii menar att för att kunna avgöra om en individ är matematiskt begåvad måste individen befinna sig i en matematisk aktivitet. Dessutom bör det matematiska materialet vara utmanande för att både identifiera och utmana en matematiskt särskilt begåvad elev. I PriMa-projektet i Hamburg är en av de viktigaste processerna i urvalsprocessen just att erbjuda problemlösning till barnen, som strukturerat observeras.

När barnen är aktiva i problemlösningen observeras de gällande till exempel hur väl barnen förstår och strävar efter att på egen hand övervinna svårigheter, hur barnen arbetar självständigt och i grupp, hur de fungerar socialt och hur de fungerar i gruppundervisning. Efter en träff med barnen möts ledarna (ca. 3 ledare på en grupp med ca 24 barn) för att diskutera igenom varje individ, och ett utlåtande görs om barnet anses vara lämpligt att delta i vidare utprövning. I den vidare utprövningen ingår både matematiktest och kognitiva test.

Gruppdiskussion

Vid Träff 6 fick deltagarna ägna 90 minuter att diskutera den teori och litteratur som lyfts genom de första fem träffarna. Diskussionsfrågorna var utvecklade i samarbete med en forskare inom

matematikdidaktik vid Karlstads universitet. Deltagarna hade också fått ett häfte med en kort sammanfattande text tillhörande respektive träff.

Lärarna diskuterade följande frågor kopplade till respektive träff. För samtliga frågor gäller att de bör relateras till den praktiska verksamheten samt kopplas till den teori och den litteratur som hör till projektet.

Träff 1 – särskild begåvning

- Vilka möjligheter finns det att strukturerat iaktta karakteristika för särskild begåvning hos eleverna?
- När bör man som lärare aktivt studera eleverna efter kriterier för särskild begåvning?
- Hur bör man som lärare studera eleverna efter kriterier för särskild begåvning?

- Hur väl fungerar det att i praktiken arbeta med att analysera uppgifter och dess lämplighet?
- På vilket/vilka sätt är detta viktigt eller oviktigt att göra?
- Vad tillför analysen av uppgifterna ert arbete i matematikklassrummet?
- Argumentera för och motivera era val kopplat till materialet vi arbetat med.

Träff 2 – Identifikation

- Hur kommer ni arbeta med att identifiera elever med särskild begåvning?
- När kommer ni att arbeta med att identifiera dem?

- Hur kan man arbeta för att identifiera elever med särskild begåvning i matematik?
- Hur kommer ni arbeta med att identifiera elever med särskild begåvning i matematik?
- När kommer ni att arbeta med att identifiera dem?

Träff 3 – Social och emotionell utveckling

Inga frågor fanns förberedda specifikt till modul 3.

Träff 4 – Underpresterare

- Hur kommer ni arbeta med att identifiera elever som underpresterar i matematik?
- Hur är det möjligt att arbeta för att få dem att prestera, och/eller att visa sin potential?

Koppla till att målet är att alla elever ska bli inkluderade, särskilt begåvade och övriga.

Träff 5 - Differentierad undervisning

- Hur kan man arbeta med att differentiera undervisningen med avseende på de fyra aspekterna *Innehåll, *Process, *Produkt, *Lärmiljö?
- Hur är det möjligt att i undervisning använda förtest för att identifiera de elever som redan behärskar det kommande området?

- Hur kan undervisningen differentieras genom att använda Blooms taxonomi? T.ex. genom att utöka uppgifter och frågeställningar?

Träff 7 och 8 – Utveckla uppgifter inför läsår två

Båda dessa träffar hade fokus på att färdigställa de uppgifter som respektive lärargrupp skulle implementera under andra läsåret. Vi hade enats om att två stycken så kallade mattegömmor skulle implementeras i samtliga grupper, oavsett undervisningsnivå. Utöver det skulle respektive grupp utveckla två uppgifter var. Totalt ledde arbetet till att tio uppgifter blev redo att implementeras under det andra läsåret.

Lärarnas perspektiv på implementering av litteratur och teorier kring matematisk särskild begåvning i sin praktik har studerats i ett parallellt forskningsprojekt. Resultaten av detta kommer finnas beskrivet i en doktorsavhandling som kommer bli klar efter denna rapport (Mellroth, in process).

Under Träff 1 till och med Träff 6 ingick alltid någon typ av arbete med matematikuppgifter i syfte att analysera och utveckla dem i relation till litteraturen om matematisk särskild begåvning. Succesivt utvecklade vi en för oss fungerande metod. Precis som alla metoder bör även denna ständigt konstruktivt kritiseras och vidareutvecklas. Viktigt att poängtera är att de lärare som arbetat med att utveckla dessa uppgifter parallellt med utvecklingsarbetet, kontinuerligt och kollegialt arbetat med att öka sin förståelse och sin kompetens i att möta lärbehov hos elever med särskild begåvning i heterogena klassrum. Här presenteras den metod vi använde oss i slutet av projekttiden för att analysera och utveckla matematikuppgifter.

- Arbeta tillsammans med andra matematiklärarkollegor
- Utgå från en uppgift ni genom er lärarexpertis anser har potential till att utvecklas till en rik uppgift.
- Lös uppgiften och diskutera lösningarna.
- Analysera uppgiften efter Krutetskiis och Sheffields kriterier, se Bilaga 3 och Bilaga 5.
- Diskutera er analys och kom överens om ett gemensamt resultat.
- Fyll i uppgiftsplaneringsdokumentet, se Bilaga 15.
- Utveckla uppgiften genom att lägga till utökade frågor, som syftar till att träna det högre tänkandet enligt Blooms taxonomi. Fyll i uppgiftsplaneringen, Bilaga 15.
- Försök förutse hur implementeringen av uppgiften kommer att fungera i helklass.
- Diskutera hur och varför elever med särskild begåvning i matematik utmanas och stimuleras av uppgiften.
- Hur tror ni att ni kommer upptäcka om elever med särskild begåvning i matematik blir utmanade och stimulerade?
- Diskutera vilket material som eventuellt kan behövas vid implementeringen av uppgiften.
- Diskutera hur lång tid ni tror uppgiften kommer behöva för att genomföras.

Till sin hjälp i arbetet hade lärarna ett exempel på hur analysarbetet för en uppgift kunde dokumenteras, se Bilaga 11 och 12 – dessa utvecklades kollegialt efterhand till det som vi kallar för uppgiftsplanering, Bilaga 15.

Testa uppgifterna kollegialt genom rollspel

Genom projektet upptäckte vi att det var en mycket bra förberedelse inför klassrumssituationen att först ha dramatiserat situationen via arrangerade rollspel. Rollspelet gjorde att lärarna lättare

kunde förutsäga olika svårigheter som elever kunde råka ut för, samt hur de kunde agera för att hjälpa vissa elever vidare i högre nivåer i uppgiften.

Vid Träff 3 hade projektledaren genomfört en uppgift, *Vikproblemet*, se Bilaga 16, som om hon vore lärare och de deltagande lärarna elever. Detta rollspel upprepades, med justeringar, vid Träff 7 och 8. Till träff 7 hade tre lärare förberett sig extra på en uppgift, *Schackdrottningar*, se Bilaga 17, som de genomförde tillsammans, som om de övriga lärarna var elever. Övningen genomfördes igen vid träff 8, då med andra lärare och med uppgiften *Fåret Eric*, se kapitel 10 uppgifter. Rollspelet som aktivitet beskrevs i form av en poster vid en forskningskonferens som handlade om lärares professionella utveckling, se bilaga 18.

Implementering av uppgifter – läsår 2

Målet med de uppgifter som utvecklades i projektet var att de skulle utmana och stimulera elever med särskild begåvning i matematik. Det fanns också ett mål kring uppgifterna att de skulle fungera att genomföras i helklass och att alla elever, även de svaga, skulle ges möjlighet att utveckla sina matematikkunskaper genom arbetet med uppgifterna. Varje uppgift genomgick tre implementeringscykler, där lärare och klass varierade mellan varje cykel. Varje lärargrupp hade två *gruppspecifika* uppgifter samt två mattegömmor som genomfördes i alla fyra lärargrupper. Hur uppgifterna växlades mellan lärarna i respektive grupp illustreras i Tabell 1.

Tabell 1 Exempel på struktur för de tre implementeringscyklerna av fyra uppgifter för en grupp av fyra lärare.

Period	*Grupp A*			
	Lärare 1	Lärare 2	Lärare 3	Lärare 4
1	Uppgift 1	Uppgift 2	Mattegömma 1	Mattegömma 2
2	Mattegömma 1	Mattegömma 2	Uppgift 1	Uppgift 2
3	Uppgift 2 och Mattegömma 2	Uppgift 1 och Mattegömma 1	Uppgift 2 och Mattegömma 2	Uppgift 1 och Mattegömma 1

För att hjälpa lärarna att strukturerat observera implementeringen och för att kunna följa respektive uppgifts utveckling under de tre implementeringscyklerna utvecklade vi ett så kallat *observationsprotokoll*, se Bilaga 19. Detta dokument utvecklades dels i samråd med forskare inom matematikdidaktik, dels i samråd med de deltagande lärarna. Den lärare som genomfört en uppgift fyllde i protokollet efter implementeringen, protokollet låg delvis till grund för diskussionerna av uppgifterna mellan varje implementeringscykel. Med erfarenheter från den tidigare nämnda forskningscirkeln (Mellroth m.fl., 2015) undersökte vi också vad eleverna ansåg om uppgiften, se Bilaga 19. Vid genomförandet hade respektive lärare eget ansvar i att avgöra om någon/några elever var matematiskt särskilt begåvade, samt att reflektera över dessas elevers arbete och engagemang i relation till övriga elever. Ingen data om elever som individer samlades in eller diskuterades. Bedömningen om en elev kunde vara matematiskt särskilt begåvad grundades alltså på respektive lärares subjektiva bedömning, dock efter att under skolutvecklingsprojektets första läsår intensivt ha läst och diskuterat teorier kring särskild begåvning.

Som start på projektets andra läsår genomfördes en konferensdag, den 19 augusti 2016, dit skolpersonal från hela landet var inbjudna. Konferensen hade cirka 270 deltagare, varav flertalet var pedagoger från Värmland. Det kom även deltagare från skolsystem och myndigheter från hela Sverige och även Norge. Föreläsare på konferensen var internationellt erkända forskare inom området särskild begåvning, J. Professor Ralf Benölken från Münsters universitet, Professor Marianne Nolte från Hamburgs universitet, Professor Roland Persson från Jönköpings universitet, Dr. Margaret Sutherland från Glasgow universitet och Attila Szabo från Stockholms universitet.

Innan föreläsningarna började hade deltagarna i projektet en diskussionstimme med varsin expert. Detta tillfälle syftade till att lärarna i ett avslappnat forum skulle kunna lyfta frågeställningar och tankar kring det kommande läsåret då de skulle implementera uppgifterna och aktivt möta elever med särskild begåvning. Lärarna som undervisade i åk 1–3 mötte Marianne Nolte respektive Margaret Sutherland, lärarna i åk 4–6 samtalade med Ralf Benölken

medan lärarna i åk 7-9 träffade Roland Persson. Detta diskussionspass blev väldigt lyckat både för lärarna, som fick bekräftelse på sin kunskap av internationella experter, men även för experterna som fick möjligheten att möta och diskutera teorier med praktiserande lärare.

I nästa kapitel presenteras resultatet av skolutvecklingsprojektet, det vill säga de tio uppgifterna, med pedagogiska och didaktiska kommentarer.

10 uppgifter

Var och en av de tio uppgifterna som analyserades, prövades och utvecklades i projektet är presenterade enligt samma struktur.

Uppgiftsformulering

Namnet på uppgiften och dess uppgiftsformulering ges, så som den kan ges muntligt eller skriftligt till eleven.

Grund

De flesta av uppgifterna har en grund som presenteras först.

Utökning

En del av uppgifterna har en utökning, som kan användas för de elever som arbetar fortare än andra eller som behöver extra utmaning. En del elever kan ha behov av att få utökningen direkt.

Material

En del uppgifter kräver material, eller arbetsblad. Sådant som vi använde oss av i projektet finns angivet här.

Genomförandet

För varje uppgift anger vi den tid vi uppskattar att uppgiften behöver för ett fullständigt genomförande. De uppgifter som genomfördes i alla årskurser från åk 1 till åk 9 har naturligt ett större tidsintervall än övriga, eftersom både elevernas ålder och/eller matematiska utveckling gör att respektive uppgift kräver olika tid för genomförandet. Vi påminner dock om att det bör förväntas att elever kommer olika långt med samma uppgift och att det ska vara accepterat i klassen. I rapporten presenteras det sätt att genomföra uppgiften på som vi upplevde som bäst, ej alla de olika prövade alternativa sätten som testats på vägen fram.

Lösningsförslag och matematiskt innehåll

Vi har kopplat samtliga uppgifter till de centrala innehållen i lgr 11. Alla uppgifter har även någon typ av lösningsförslag, dessa är dock av olika karaktär och av olika omfattning. Det beror dels på uppgifterna i sig, men också på hur mycket vi hann arbeta med de olika uppgifterna i projektet. Vi har valt att presentera så långt vi kommit för respektive uppgift istället för att till exempel korta av de uppgifter som vi arbetade mer med lösningar jämfört med andra.

Tillhörande dokument

För vissa uppgifter har vi återanvänt och/eller utvecklat visst material som kan vara användbart vid genomförandet av uppgiften. När så är fallet finns dessa med vid uppgiften så att det ska vara enkelt att kopiera för den som vill använda detta.

Didaktiska och pedagogiska kommentarer

Varje uppgift har didaktiska och pedagogiska kommentarer som lyfter uppgiftens möjlighet att fungera för alla elever i klassrummet och samtidigt utmana elever med särskild begåvning. Vi relaterar till våra uppgiftsanalyser som kopplar till Sheffield (2003) och Krutetskii (1976), samt till de pedagogiska strategier vi använt oss av i projektet t.ex. differentierade instruktioner (Tomlinson, 2001).

Litteratur

Litteratur som använts konkret

Bouchard, L. L. (2004). An instrument for the measure of Dabrowskian overexcitabilities to identify gifted elementary students. *Gifted Child Quarterly, 48*(4), 339 – 350. Länk till artikeln. Till Träff 3.

Gagné, F. (2003). Transforming gifts into talents: The DMGT as a developmental theory. In N. Colangelo & G. A. Davis (Eds.) Handbook of gifted education (3rd edition). (pp. 60-73). Boston: Allyn and Bacon.

Hagland, E., & Taflin, E. (2014). Anpassning av problem. Modul: Problemlösning. Del 7: Anpassning av problem. Matematiklyftet. Stockholm: Skolverket. Länk till artikeln. Till Träff 4.

Larsson, M. (2013). Interaktion. Modul: Problemlösning. Del 6: Interaktion, kommunikation och resonemang. Matematiklyftet. Stockholm: Skolverket. Länk till artikeln åk 7-9. Till Träff 4.

Mellroth, E. (2009). *Hur man kan identifiera och stimulera barns matematiska förmågor*. Magisteruppsats, Växjö universitet, Växjö. Länk till uppsatsen. Till Träff 7 & 8.

Sheffield, L. J. (2003). *Extending the Challenge in Mathematics: Developing Mathematical Promise in K - 8 Students*. Thousand Oaks, CA: Corwin Press. Till de flesta träffar.

Sheffield, L. (2015). *Myth about "gifted" mathematics students: How widespread are they*? Paper presented at the 9th International MCG Conference, Siniai, Romania, June 25-28 2015. pp. 114-119

Skolverket. (2015). *Att arbeta med särskilt begåvade elever.* Hämtat från https://www.skolverket.se/skolutveckling/larande/sarskilt-begavade-elever-1.230661

Skolverket. (2017). *Diamant – ett diagnosmaterial i matematik*. Länk till materialet. Till Träff 5.

Stretton, P. (2008). Overexcitabilities Checklist. OAGC Review – Spring 2008. Exempel på länk till listan. Till Träff 3.

Sveriges kommuner och landsting. (2016). *Handlingsplan särskilt begåvade barn och* elever. Hämtat från https://skl.se/download/18.1fae8ed6156b062e29497858/1473239906709/Handlingsplan-sarskilt-begavade-2016.pdf

Sword, L. (2003). Over-excitability checklist. Gifted & Creative Services Australia Pty Ltd. Länk till listan. Till Träff 3.

Taflin, E., Gracie, J., Halldén, M., m.fl. (2014). Kommunikation i matematik. Modul: Problemlösning. Del 6: Kommunikation i problemlösning. Matematiklyftet. Stockholm: Skolverket. Länk till artikeln, åk 1-3, åk 4-6. Till träff 4.

Thornberg, P. (2013). Att öppna upp slutna uppgifter. Modul Samband och förändring. Del 5 Konstruktion av uppgifter. Matematiklyftet. Stockholm: Skolverket. Länk till artikeln åk 1-3, åk 4-6, åk 7-9. Till träff 4.

UNSW. (2004). Professional Development Package for Teachers. Hämtat från https://education.arts.unsw.edu.au/about-us/gerric/resources/pd-package/

Litteratur som legat till grund för projektet, t.ex. som underlag för presentationer, workshops och arbetet med uppgifterna

Anderson, L. W., Krathwohl, D. R., Airasian, P. W., & Bloom, B. S. (2001). *A taxonomy for learning, teaching, and assessing: a revision of Bloom's taxonomy of educational objectives*. New York, NY: Longman.

Benölken, R., (2015). *"Mathe für kleine asse" – an enrichment project at the university of Münster*. Paper presented at the 9th International MCG Conference, Siniai, Romania, June 25-28 2015. pp. 140 - 145

Clements, M. A. (1984). Terence Tao. *Educational Studies in Mathematics*, *15*(3), 213 – 238. Länk journalen och artikeln.

Cosmovici Idsøe, (2014). *Elever med akademisk talent i skolen*. Cappelen Damm Akademisk.

Emre-Akdoğan, E. & Yazgan-Sağ, G. (2015). *Prospective teachers' views of creativity in school mathematics.* Paper presented at the 9th International MCG Conference, Siniai, Romania, June 25-28 2015. pp. 182 – 187

Fuchs, M. & Käpnick, F. (2009). Mathe für kleine Asse. Empfehlungen zur Förderung mathematisch interessierter und begabter Kinder im 3. und 4. Schuljahr (Vol. 2). Berlin: Cornelsen.

Hagland, K., Hedrén, R., & Taflin, E. (2005). *Rika matematiska problem*. Stockholm: Liber

Kilhamn, C., & Olteanu, C. (2014). Sociomatematiska normer i klassrummet. Modul: Algebra Del 6: Sociomatematiska normer. Matematiklyftet. Stockholm: Skolverket. Länk till artikeln åk 4-6.

Kokot, S (1999). Help – our child is gifted! Guidelines for parents of gifted children. Lyttelton, Soth Africa: Radford House Publications.

Krutetskii, V. A. (1976). *The psychology of mathematical abilities in schoolchildren.* Chicago, IL: The University of Chicago Press.

Mellroth, E., Arwidsson, A., Holmberg, K., Lindgren Persson, A., Nätterdal, C., Perman, L., Sköld, S., & Thyberg, A. (2016). En forskningscirkel för lärare om särskild begåvning i matematik. [A research circle for teachers on mathematical promise]. Karlstad, Sweden: Karlstad University Press. Länk till rapporten.

Nissen, P. (2016). *Detecting talent: A Checklist for the Prediction of Talent*. Hämtad från http://www.talenttoolbox.net/Articles/172-Detecting-Talant-A-Checklist-for-prediction-of-talent-FINAL.pdf

Nolte, M. (2015). *Fostering mathematical giftedness in regular classrooms settings and in special programs.* Paper presented at the 9th International MCG Conference, Siniai, Romania, June 25-28 2015. pp. 244 -245

Olteanu, C., & Kilhamn, C. (2014). Sociomatematiska normer i klassrummet. Modul: Algebra Del 6: Sociomatematiska normer. Matematiklyftet. Stockholm: Skolverket. Länk till artikeln, åk 1-3, åk 7-9.

Pedagog Stockholm. (2014). Intervju med Attila Szabo, Nyckeln är att identifiera de särskilt begåvade. Länk till texten.

Persson, R. S. (2014). Särbegåvning: ett differentierat fenomen med sociala konsekvenser. *Socialmedicinsk tidskrift*, *91*(2), 129-138. Länk till artikeln.

Persson, R. S. (2014). *Tre korta texter on att förstå särskilt begåvade barn i den svenska skolan.* Jönköping. Länk till texten.

Renzulli, J. (1990). The three-ring conception of giftedness: a developmental model for creative productivity. In R. J. Sternberg & J. E. Davidson (Eds.), *Conceptions of giftedness* (pp. 53-92). New York: Cambridge University Press.

Sheffield, L. (2015). *Myth about "gifted" mathematics students: How widespread are they*? Paper presented at the 9th International MCG Conference, Siniai, Romania, June 25-28 2015. pp. 114-119.

Singer, F. M., Pelczer, I., & Voica, C. (2015). *Problem posing: Students between driven creativity and mathematical failure.* Paper presented at the CERME 9, Prague.

Skolverket. (2017). *Diamant – ett diagnosmaterial i matematik.* Hämtat från https://www.skolverket.se/bedomning/bedomning/bedomningsstod/matematik/diamant-1.196205

Skolverket. (2011). Läroplan för grundskolan, förskoleklassen och fritidshemmet 2011

Stutz, M., & Stamm, M. (2006). *Proposal for a Study on the Early Career Development of Precovious Readers and Mathematicians.* http://perso.unifr.ch/margrit.stamm/forschung/fo_projekte.php.

Szabo, A. (2013). Matematiska förmågors interaktion och det matematiska minnets roll vid lösning av matematiska problem. Licentiate thesis, Stockholm: Stockholms Universitet.

Wikström, A. (2014). Vad händer i klassrummet? Modul: Undervisa matematik utifrån problemlösning Del 4. Klassrumsnormer. Matematiklyftet. Stockholm: Skolverket. Länk till artikeln.

Externa föreläsare

Ralf Benölken (J. Professor vid Münsters universitet, Tyskland) – vid Träff 2: Om identifikation av matematiskt begåvade elever samt stöd till dem via utanför-skolan aktiviteter.

Yvonne Liljekvist (Dr. vid Karlstads universitet) – vid Träff 3: Om immitativa och kreativa resonemang.

Linda Sheffield (Professor Emerita vid Northen Kentucky University, USA) – vid Träff 4: Om att inkludera matematiskt begåvade elever i undervisningen och att lyfta alla elever i matematik.

Filmklipp som använts i projektet

UR Samtiden. (2014). Begåvning tillgång eller belastning. Länk till programmen. Till Träff 4.

The Dot. (2010). En film som kan tolkas som att handla om vad positivt bemötande och hög förväntan kan bidra till. Länk till filmen. Till Träff 4.

KARLSTADS KOMMUN

BARN- OCH UNGDOMSFÖRVALTNINGEN
Karlstad 2015-04-08
Elisabet Mellroth
Projektledare
elisabet.mellroth@karlstad.se

Med rätt att utmanas i en skola för alla

Inbjudan till lärare att delta i ett skolutvecklingsprojekt

Augusti 2015 till och med maj 2017

Sammanfattning

Under de två kommande läsåren genomförs i Karlstads kommun ett i Sverige unikt skolutvecklingsprojekt. Projektet har fokus på de särskilt begåvade barnens rätt att utmanas i en skola som är till för alla. I projektet kommer de deltagande lärarna att fortbildas om särskilt begåvade elever och de behov dessa har i undervisningssituationer. Tillsammans kommer projektdeltagarna med sina nyvunna kunskaper utveckla och testa undervisningsinnehåll och undervisningsmetoder i ämnet matematik med fokus på de särskilt begåvade eleverna. Projektets resultat förväntas gynna alla elever i klassrummet, inte bara de elever som står i fokus. Ljungbergsfonden finansierar projektet. Med detta brev bjuder vi in matematiklärare på grundskolor och förskolor att delta i projektet.

Syfte

Syftet med detta projekt är att i den svenska kontexten och dess skolsystem med det heterogena klassrummet på vetenskaplig grund utveckla innehåll och undervisningssituationer i matematik med fokus på elever särskilt begåvade i matematik. Det vill säga; utveckla, pröva och utvärdera undervisning inom ämnet matematik som är speciellt anpassat för särskilt begåvade elever i matematik. I huvudsak handlar det om att skapa, utvärdera och definiera uppgifts/problemtyper, samt att utveckla undervisningsmetoder som fungerar i en svensk klassrumsmiljö. Fokus är på de särskilt begåvade, men resultatet förväntas gynna alla elever.

Målet är att öka kunskapen hos lärare om dessa elevers behov, styrkor och svårigheter, samt deras rättigheter. Ett mer detaljerat mål är att definiera vilket typ av innehåll som lämpar sig för de särskilt begåvade eleverna, både med avseende på matematiska förmågor och specifikt matematikinnehåll. Projektet avser också att identifiera några typer av undervisningsmetoder som är speciellt lämpliga för dessa elever i det vanliga klassrummet. Projektets resultat är tänkt att fungera som en kunskapsbas dels i den egna regionen men även nationellt.

Vad ingår

Lärarens deltagande i projektet löper över två år med start i augusti 2015 och slut i maj/juni 2017.

Del 1: Första läsåret, 2015 – 2016, kommer i huvudsak bestå av fortbildning för de deltagande lärarna där ämnet är undervisning av särskilt begåvade elever både allmänt och specifikt i ämnet matematik. Fortbildningen lyfter olika aspekter kring undervisning av dessa elever. Utöver det kommer vi tillsammans välja och utveckla undervisningsmaterial i matematik lämpligt för dessa elever.

Del 2: Andra läsåret, 2016 – 2017, kommer handla om att i undervisningen implementera delar av det undervisningsmaterial som utvecklats under det första läsåret. Implementeringen kommer att analyseras och utvecklas; det kollegiala samtalet spelar en stor roll i detta arbete.

Arbetsinsats

Del 1: Under läsåret, 2015 – 2016, kommer cirka 80 timmar att krävas för respektive deltagare i projektet. I dagsläget är 8 heldagar planerade, 4 på hösten och 4 på våren. Viss förberedelsetid i form av bland annat inläsning av material ingår.

Del 2: Under läsåret, 2016–2017, ska materialet som utvecklats under del 1 implementeras i lärarnas ordinarie undervisning. Utöver detta tillkommer träffar för analys, reflektion och utveckling och för detta behöver de deltagande avsätta cirka 40 timmar.

Ekonomisk ersättning

Ekonomisk ersättning kommer att utgå för deltagande i projektet och det finns olika sätt att använda dessa medel, t.ex.

- projektet bekostar en vikarie,
- projektet ersätter den deltagande läraren med en timersättning utöver dennes ordinarie lön.

Material

Projektet bekostar material för deltagarna, mycket material kommer vara på engelska. Diskussioner kommer dock vara på svenska.

Möjlighet till erfarenhetsutbyte genom projektet

Inom projektet finns medel för att dela erfarenheter med skolor i Europa som har en fungerande verksamhet för särskilt begåvade elever. I praktiken innebär detta att några av deltagarna kan följa med på studiebesök t.ex. till Holland, Tyskland eller England. Troligtvis kommer dessa studiebesök att förläggas under vecka 44 eller på studiedagarna i juni när eleverna i Sverige gått på sommarlov. Erfarenhetsutbytet ligger utanför den beskrivna arbetsinsatsen. Möjlighet till extra ersättning eller vikarie finns inte för detta, tanken är att erfarenhetsutbytet ska ersätta studiedagar på hemmaplan. Projektet bekostar resa, boende och kostnader för respektive studiebesök.

Forskning

Karlstads universitet kommer att bedriva en forskningsstudie knuten till skolutvecklingsprojektet. Detta innebär att lärarna som deltar i projektet också kommer delta i en forskningsstudie. Deltagandet i forskningsstudien är anonymt, d.v.s. ingen identitet kommer att avslöjas i något sammanhang där forskningen presenteras. Allt deltagande i en forskningsstudie är frivilligt, vilket innebär att man när som helst kan avsluta deltagandet i forskningsstudien. Karlstads kommun stödjer forskningsstudien och önskar att de deltagande lärarna är positiva till deltagande i forskningsstudien vid starten, det vill säga när man ansöker om att få vara med i skolutvecklingsprojektet. Väljer man att senare att avsluta deltagandet i forskningsstudien har man naturligtvis kvar sin plats i skolutvecklingsprojektet.

Anmälan för deltagande

Projektet strävar efter att 10-20 lärare inom grundskolan ska delta i projektet. Deltagaren ska vara undervisande lärare i matematik. Lärare för de lägre årskurserna kommer att prioriteras om det blir fler sökande än platser, men lärare för samtliga årskurser F – 9 är varmt välkomna. Vi kommer att sträva efter att de deltagande lärarna skall representera flertalet av skolorna i kommunen.

Rektor bör stödja och uppmuntra lärarens deltagande i projektet.

Anmälan till projektet gör man genom att fylla i anmälningsblanketten, scanna in den och maila till Elisabet Mellroth, elisabet.mellroth@karlstad.se senast 28 maj 2015.

Fortsättning efter projektets slut

Detta är en unik satsning i Sverige, det är första gången som ett skolutvecklingsprojekt under en längre tid genomförs gällande skolpraktiken för särskilt begåvade elever. Efter projektets avslut kommer ett intyg delas ut som bekräftar deltagandet. I projektet räknar vi med att deltagarna kommer bli ambassadörer i att sprida kunskap kring undervisning av särskilt begåvade elever inte bara på sina egna skolor, utan även inom och utom kommunen. Det är mycket troligt att deltagarna kommer bli engagerade både regionalt och nationellt i önskan om att få ta del av deras erfarenhet och kunskap. De deltagande lärarna kommer att uppmuntras att dela sina erfarenheter på matematikbiennalen 2018.

Finansiering

Projektet finansieras av Ljungbergsfonden och Karlstads kommun.

Elisabet Mellroth	Maria Holm
Projektledare	Chef utvecklingsstöd

KARLSTADS KOMMUN

BARN- OCH UNGDOMSFÖRVALTNINGEN
Karlstad 2015-04-08
Projektledare: Elisabet Mellroth,
elisabet.mellroth@karlstad.se

Anmälan till projektet: Med rätt att utmanas i en skola för alla

Deltagande lärare:
Skola:
Kontaktuppgifter – deltagande lärare Email: Telefon:
Undervisar matematik i årskurs/årskurser under läsåret 2015–2016: Är behörig att undervisa matematik i årskurs:
Underskrifter Datum Datum Deltagande lärare Rektor Namnförtydligande Namnförtydligande
Scanna in dokumentet och maila till elisabet.mellroth@karlstad.se senast 28 maj 2015. Alternativt skicka till: Elisabet Mellroth, BUF, Karlstads kommun, 651 84 Karlstad

Matematiska förmågor enilgt Krutetskii

Krutetskii (1976) är välanvänd inom forskning gällande matematiskt begåvade barn och elever. I det matematikdidaktiska materialet i Skolverkets (2015) stödmaterial för särskilt begåvade elever finns en svensk översättning av de förmågor Krutetskii menar man kan upptäcka hos matematiskt begåvade elever när de är aktiva i problemlösningssituationer. I projektet upplevde vi vissa svårigheter med att operationalisera den svenska översättningen, varför även den engelska beskrivningen från 1976 finns med nedför den svenska. För vidare redogörelse av Krutetskiis förmågor hänvisar vi till exempel till Attila Szabos doktorsavhandling från 2017, samt även till Tomas Dahls licentiatuppsats från 20XX.

F1. Förmåga att formalisera matematiskt material: att skilja form från innehåll, att operera med formella strukturer av relationer och samband.

F2. Förmåga att generalisera matematiskt material.

F3. Förmåga att operera med siffor och andra symboler.

F4. Förmåga till sekventiellt, logiskt resonerande: kunna skilja på förutsättningar för och slutsatser av ett resonemang och förmågan att dra slutsatser från givna förutsättningar.

F5. Förmåga att förkorta resonemang, klart och enkelt i slutsatser.

F6. Förmåga till flexibilitet och reversibilitet, skifta tankemodeller och vända tankegångar.

F7. Förmåga att minnas matematisk information som gör det möjligt att använda erfarenheter i nya problemlösningssituationer, exempelvis relationer mellan storheter och argumentationsscheman.

F8. Generell fallenhet och intresse för matematik i en lust att söka matematiska aspekter av omvärlden. (Krutetskii, 1976, i Pettersson & Wistedt, 2013).

Från Krutetskii, (1976), s. 350 – 351.

1. Obtaining mathematical information

a. The ability for formalized perception of mathematical material, for grasping the formal structure of a problem.

2. Processing mathematical information

a. The ability for logical thought in the sphere of quantitative and spatial relationships, number and letter symbols; the ability to think in mathematical symbols.

b. The ability for rapid and broad generalization of mathematical objects, relations, and operations.

c. The ability to curtail the process of mathematical reasoning and the system of corresponding operations, the ability to think in curtailed structures.

d. Flexibility of mental process in mathematical activity.

e. Striving for clarity, simplicity, economy, and rationality of solutions.

f. The ability for rapid and free reconstruction of the direction of a mental process, switching from a direct to a reverse train of thought (reversibility of the mental process in mathematical reasoning).

3. Retaining mathematical information

a. Mathematical memory (generalized memory for mathematical relationships, type characteristics, schemes of arguments and proofs, methods of problemsolving, and principles of approach).

4. General synthetic component

a. Mathematical cast of mind.

Kännetecken som stämmer på *många* matematiskt särbegåvade

- Enligt Linda Sheffields modell kan man upptäcka vissa kännetecken hos en matematikbegåvad elev:

Matematiskt sinne
Matematisk formalisering och generalisering
Matematisk kreativitet
Matematisk nyfikenhet och uthållighet

Matematiskt sinne

- Älskar att utforska mönster och pussel,
- Ser matematik och struktur i olika situationer,
- Känner igen, skapar och utvidgar mönster,
- Organiserar och kategoriserar information,
- Har en djup förståelse för enkla matematiska begrepp, inklusive en välutvecklad taluppfattning (Sheffield, 2003 i Szabo, 2013).

Szabo, A. (2013). *Matematiska förmågors interaktion och det matematiska minnets roll vid lösning av matematiska problem.* Licentiate thesis, Stockholm: Stockholms Universitet.

Matematisk formalisering och generalisering

- Generaliserar strukturen av ett problem, oftast efter endast ett fåtal exempel,
- Använder ett, till problemet, anpassat resonemang,
- Tänker logiskt och symboliskt med hjälp av kvantitativa och rumsliga samband,
- Utvecklar bevis och andra övertygande argument (Sheffield, 2003 i Szabo, 2013).

Szabo, A. (2013). *Matematiska förmågors interaktion och det matematiska minnets roll vid lösning av matematiska problem.* Licentiate thesis, Stockholm: Stockholms Universitet.

Matematisk kreativitet

- Bearbetar matematisk information flexibelt – växlar från beräkningar till visuella och grafiska representationer,
- Vänder på tankegångar – kan växla från direkta till omvända angreppssätt,
- Har genuina metoder för problemlösning – löser problem på sitt eget sätt, med hjälp av ovanliga metoder,
- Strävar efter matematisk elegans och tydlighet i sitt resonemang (Sheffield, 2003 í Szabo, 2013).

Szabo, A. (2013). *Matematiska förmågors interaktion och det matematiska minnets roll vid lösning av matematiska problem.* Licentiate thesis, Stockholm: Stockholms Universitet.

Matematisk nyfikenhet och uthållighet

- Är nyfiken på matematiska samband och relationer – undrar "varför" och "tänk om",
- Har energi och uthållighet vid lösning av svåra problem,
- Söker bortom problemets ytliga drag och fortsätter att utforska även efter att det ursprungliga problemet är löst. (Sheffield, 2003 í Szabo, 2013)

Szabo, A. (2013). *Matematiska förmågors interaktion och det matematiska minnets roll vid lösning av matematiska problem.* Licentiate thesis, Stockholm: Stockholms Universitet.

Guide till att analysera uppgifter

Kommentarer baserade på erfarenheter från forskningscirkeln 2014-2015, (Mellroth m.fl., 2015)

1. Alla elever ska kunna börja på uppgiften, den ska erbjuda utmaning för elever på alla nivåer.
   Kommentar:
   Med god kännedom om de åldersgrupper respektive lärare undervisar i upplevs det relativt lätt att avgöra om uppgiften erbjuder ”startmöjlighet” för alla. Att avgöra om uppgiften också erbjuder utmaning på högre nivåer krävs att läraren själv utforskar problemet.

2. Uppgiften ska uppmuntra elever att finna mönster, göra generaliseringar, resonera, förklara (justify) och ifrågasätta svaren.
   Kommentar:
   Det är lätt att analysera om uppgiften **erbjuder** möjlighet till att generalisera etc. men svårt att analysera om den **uppmuntrar** till det.

3. Tillåta eleverna att angripa uppgiften på flera olika sätt, använda olika lösningsstrategier, verktyg, tekniker, modeller, ritningar…
   Kommentar:
   Det är lätt att analysera om uppgiften **tillåter** flera lösningsstrategier, men svårt att förutspå om eleverna kommer välja flera/olika sådana. Lärarna behöver utforska uppgiftens möjligheter för att upptäcka olika lösningsstrategier.

4. Uppmuntra kreativitet och ett innovativt applicerande av matematik.
   Kommentar:
   I forskningscirkeln upplevdes det relativt enkelt att avgöra detta, bedömningen blir subjektiv där varje lärare naturligt bidrar med sin erfarenhet och expertis. Det går att analysera djupare t.ex. genom att koppla till imitativt och kreativt resonemang (Lithner, 2008), enligt Lithner handlar det kreativa bland annat om att eleven själv måste (åter)skapa den matematik som behövs för att lösa uppgiften.

5. Inneha viktig och användbar matematik och uppmuntra eleverna att göra matematiken vettig (to make sense).
   Kommentar:
   Detta är kanske den svåraste punkten för en uppgift att uppfylla, frågan är vad det egentligen innebär att matematiken i uppgiften är användbar och ”vettig”?

6. Tillåta olika startpunkter, olika “mellanlägen”, olika lösningar och att olika saker tas hänsyn till undantas eller försvaras (different positions to be taken or defended).
   Kommentar:
   Detta är en utvidgning av punkt 1. Vår tolkning i forskningscirkeln är att det bland

annat innebär att eleverna kan nå olika nivåer i sina svar, t.ex. ett specifikt svar jmf. med ett generellt svar.

7. Uppmuntra till engagemang, matematisk diskurs och samarbete.
   Kommentar:
   Precis som vid punkt 2 så är detta mycket svårt att förutse. Jmf. ”Var är jag” med ”Drömfält”. Kanske måste testas empiriskt.

8. Kräva ett tänkande på en högre nivå och erbjuda problemlösning.
   Kommentar:
   Precis som för punkt 1 och 3 behöver lärare själva utforska problemet för att avgöra detta.

9. Främja kompetens, nöje, självständighet och självförtroende i matematiska förmågor.
   Kommentar:
   Detta är svårt att avgöra, i forskningscirkeln kunde vi ana tendenser till detta via intervjuer med elever efter genomförandet. Elevers nöje kan dock uppskattas via lärarobservationer och liknande manometermätningar.

10. Möjliggöra för lärare och för elever att själva att bedöma framgångar och svårigheter.
    Kommentar:
    Genom lärares erfarenhet och egna utforskning av problemet är det möjligt att avgöra om eleven själv kan sina framgångar och svårigheter.

Copyright © by Dr. Poul Nissen. Translated into Swedish by Elisabet Mellroth and Camilla Svens-Liavåg permission from Dr. Poul Nissen. Reproduced under Licence #001-08-24-16

Checklista / elev

0 1 2 Jag kan bli helt uppslukad om jag är intresserad av något.

0 1 2 Jag lär mig snabbt.

0 1 2 Jag har ett stort ordförråd.

0 1 2 Jag är bra på att tänka logiskt.

0 1 2 Jag tycker det är viktigt med ärlighet och rättvisa.

0 1 2 Jag tycker att det är spännande att undersöka något och få lära mig nya saker.

0 1 2 Jag är extremt nyfiken och vet mycket om många saker.

0 1 2 Jag är bra på att konstruera och föreställa mig saker.

0 1 2 Jag uppfattar saker snabbt.

0 1 2 Jag är bra på att fundera, resonera och reflektera.

0 1 2 Jag vet att jag är klok och duktig.

0 1 2 Jag har lätt att lära mig nya saker.

0 1 2 Jag har ett riktigt bra minne.

0 1 2 Jag är bra på matematik.

0 1 2 Jag är bra på avancerade spel t.ex. på dator

0 1 2 Jag håller fast vid mina intressen.

0 1 2 Jag är ivrigt observerande

0 1 2 Jag har mycket känslor och är känslig.

0 1 2 Jag gillar inte rutinarbete på lektionerna.

0 1 2 Jag föredrar att vara tillsammans med kompisar som har samma intressen som jag.

0 1 2 Jag tycker att jag är annorlunda än andra i min ålder.

0 1 2 Jag är bra på att tänka strategiskt.

0 1 2 Jag är mycket humoristisk.

0 1 2 Jag tänker annorlunda än andra i min ålder.

0 1 2 Jag gillar projektarbete i skolan.

Copyright © by Dr. Poul Nissen. Translated into Swedish by Elisabet Mellroth and Camilla Svens-Liavåg permission from Dr. Poul Nissen. Reproduced under Licence #001-08-24-16

Checklista / förälder

0 1 2 Har ett stort ordförråd

0 1 2 Uppfattar saker snabbt

0 1 2 Har riktigt bra minne

0 1 2 Kan bli helt uppslukad om något är intressant

0 1 2 Tycker det är viktigt med ärlighet och rättvisa

0 1 2 Är bra på logiskt tänkande

0 1 2 Lär sig snabbt

0 1 2 Är bra på att förstå komplicerade sammanhang

0 1 2 Älskade högläsning som liten

0 1 2 Är bra på att fundera, resonera och reflektera

0 1 2 Barnet kunde tänka abstrakt innan det började skolan

0 1 2 Har mycket känslor och är känslig

0 1 2 Är ivrigt observerande

0 1 2 Är extremt nyfiken och vet mycket om många saker

0 1 2 Ger ofta, för sin ålder, väldigt mogna omdömen/värderingar.

0 1 2 Är bra på att konstruera och föreställa sig saker.

0 1 2 Barnets sinne för humor utvecklades tidigt

0 1 2 Barnet framförde, för sin ålder, mogna åsikter och värderingar innan det började skolan

0 1 2 Är bra på matematik

0 1 2 Barnet kunde förstå ironi innan det började skolan

0 1 2 Språkutvecklingen startade mycket tidigt

0 1 2 Barnet kunde alfabetet innan det började skolan

0 1 2 Föredrar att vara tillsammans med kompisar med samma intressen

0 1 2 Barnet använde främmande ord innan det började skolan

0 1 2 Är perfektionistisk

Copyright © by Dr. Poul Nissen. Translated into Swedish by Elisabet Mellroth and Camilla Svens-Liavåg permission from Dr. Poul Nissen. Reproduced under Licence #001-08-24-16

Checklista / lärare

0 1 2 Uppfattar snabbt

0 1 2 Har riktigt bra minne

0 1 2 Lär sig snabbt

0 1 2 Har stort ordförråd

0 1 2 Är bra på logiskt tänkande

0 1 2 Är bra på att fundera, resonera och reflektera

0 1 2 Kan bli helt uppslukad när det är något som intresserar

0 1 2 Är bra på matematik

0 1 2 Håller fast vid sina intressen

0 1 2 Har mycket känslor och är känslig.

0 1 2 Tycker det är viktigt med ärlighet och rättvisa

0 1 2 Är bra på att förstå komplicerade sammanhang

0 1 2 Kan koncentrera sig under lång tid

0 1 2 Är extremt nyfiken och vet mycket om många saker

0 1 2 Är extremt duktig på ett eller flera ämnesområden, jämfört med vad man kan förvänta sig av elever i samma ålder

0 1 2 Är bra på att konstruera och föreställa sig saker

0 1 2 Är ivrigt observerande

0 1 2 Är bra på att tänka strategiskt

0 1 2 Är utan tvekan en av de duktigaste i klassen i ett eller flera ämnen

0 1 2 Ger ofta, för sin ålder, väldigt mogna omdömen/värderingar

0 1 2 Är duktig på att jobba målinriktat för att hitta lösningar

0 1 2 Tycker om projektarbete i skolan

0 1 2 Har goda arbetsvanor

0 1 2 Är väldigt intresserad av skolarbetet

0 1 2 Är väldigt duktig på att hantera stora mängder information

Att ställa rätt frågor (Sheffield, 2003)

Vem? *Who*,

Vad, Vilka eller Tänk om? *What or what if*,

När? *When*,

Var, Vart? *Where*,

Varför eller varför inte? *Why or why not*,

Hur? How?

Vem?

Vem kan återge det med egna ord? Vem har använt en annorlunda metod eller har en annorlunda lösning? Vem har en unik fråga eller ett unikt förslag? Vem har rätt?

Vad, Vilka eller Tänk om?

Vilken mening kan jag göra av detta problemet? Vad är svaret? Vilka är de essentiella elementen i detta problem? Vad är den viktiga matematiken? Vilka mönster kan jag se i datan? Vilka generaliseringar kan jag göra av de funna mönstren? Vilka bevis har jag? Tänk om jag ändrar på en eller flera delar i problemet?

När?

När fungerar det? När fungerar det inte?

Var, Vart?

Vart kom det från? Var ska jag börja? Vart ska jag gå sen? Var hittar jag ytterligare information?

Varför eller varför inte?

Varför fungerar det? Varför fungerar det inte?

Hur?

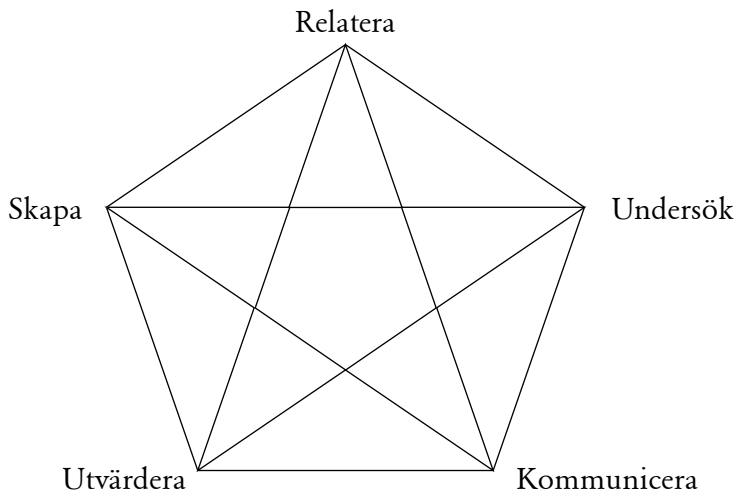
Hur liknar detta andra problem eller mönster jag har sett? Hur skiljer det sig? Hur kan det relatera till ”real-life” situationer eller modeller? Hur många lösningar är möjliga? Hur många sätt kan jag använda för att representera, simulera, modellera eller visualisera dessa idéer? Hur många sätt kan jag använda för att sortera, organisera och presentera informationen på?

Översatt och tolkat från Sheffield (2003) till detta skolutvecklingsprojekt.

Sheffields öppna inställning till problemlösning

Fritt översatt från Sheffield (2003).

Rikt lärande uppgifter är inte rika av sig själva. Det beror på hur man arbetar med dem. Ett sätt att arbeta med dem är via en öppen inställning till problemet istället för att arbeta hierarkiskt i stil med 1) förstå problemet; 2) Gör en plan; 3) Utför planen; 4) Kontrollera. Sheffield föreslår följande modell som man kan röra sig fritt inom, i vilken ordning som helst.



När man arbetar med att lösa problemet kan man börja i vilket horn som helst och fortsätta i den ordning som känns bäst. Till exempel på följande vis:

- Relatera problemet till andra problem som redan är lösta.
- Undersök problemet. Tänk djupt och ställ frågor.
- Utvärdera era resultat.
- Kommunicera era resultat.
- Skapa nya frågeställningar att utforska.

Exempel på uppgiftsanalys för uppgift: *Lamporna*

Uppgiftsformulering

Du har två lampor, A och B. Lampa A blinkar var 4:e sekund och lampa B blinkar var 7:e sekund. Båda lamporna börjar blinka samtidigt.

- Kommer lamporna att blinka samtidigt någon gång förutom den första?
- Kan du hitta något mönster?
- Kan du visa med någon beräkning eller formel hur du kommer fram till resultatet?
- Vilken är den längsta tid då ingen lampa lyser? Kan du beskriva när detta händer?

Analys av uppgiften

A. Vilka kriterier för en rik lärande uppgift (Sheffield) uppfyller den valda uppgiften?

   i. Hur tror ni att kriterierna kommer synliggöras genom elevernas arbete?

Om något/några kriterier saknas, går det att göra om uppgiften så att dessa också uppfylls? Hur? Varför inte?

Analysens resultat av uppgiften av kriterier för en rik lärande uppgift, Bilaga 5, (Sheffield, 2003), ses Tabell 1, i Tabell 2 visas delar av de resonemang som lett fram till resultatet.

Tabell 1 Resultat av analysen av uppgift 'Lamporna' – kriterier för rikt lärande uppgift, ett *X* innebär att vi ansett att uppgiften uppfyller kriteriet.

Kriterie	Enl. analys
1 Alla kunna börja, utmaning på flera nivåer	X
2 Finna mönster, generaliseringar, förklara, ifrågasätta.	X
3 Olika arbetssätt & lösningsstrategier.	X
4 Uppmuntra kreativitet & innovation.	X
5 Inneha viktig matematik.	X
6 Olika start-, mellanlägen, olika lösningar..	X
7 Uppmuntrar till engagemang och samarbete.	
8 Kräva tänkande på högre nivå, problemlösning	X
9 Främja kompetens, nöje, självständighet i matematiska förmågor.	
10 Möjliggöra att själv bedöma framgång och svårigheter	X

Tabell 2 Exempel på resonemang för kriterierna för en rikt lärande uppgift (Sheffield, 2003).

Kriterie	Ja/nej	Kommentar
1	Ja	Elevernas matematiska nivå avgör om läraren behöver tillhandahålla hjälpmedel t.ex. i form av konkret material för att möjliggöra att alla kan börja
2	Ja	Det finns flera mönster att finna i uppgiften.
3	Ja	Uppgiften är öppen och ger inga instruktioner kring hur eleven ska påbörja lösningen. Flera olika metoder finns, se kommentar vid stödmaterialets förmåga F6.
4	Ja	Uppgiften är öppen och inte styrande, eleven är fri att själv välja angreppssätt. Uppgiften har ett djup som kräver flexibilitet av eleven, eftersom uppgiften inte är styrande kan man anse att den uppmuntrar till egna, originella lösningar.
5	Ja, med tveksamhet	Uppgiften handlar mycket om att söka mönster och hitta samband, vilket är en viktig egenskap i matematik. Det kan inte anses vettigt eller viktigt att räkna tid mellan blinkande lampor.
6	Ja	Det finns olika startlägen och mellanlägen, man kan se på och presentera uppgiften på olika sätt. Eleverna kan arbeta med specifika svar eller generellt.
7	?	Det är svårt att avgöra innan uppgiften testats empiriskt, det är dock troligt att uppgiften åtminstone uppmuntrar till att eleverna vill jämföra sina svar med varandra.
8	Ja	För att arbeta på det djup som uppgiften erbjuder krävs ett tänkande på en högre nivå, det krävs dock inte för att komma en bit på väg.
9	?	Svår att avgöra om man inte testar empiriskt.
10	Ja	Läraren kan t.ex. bedöma om eleven arbetar enligt Krutetskiis förmågor (F1-F8) i stödmaterialet samt om läraren haft eleven under en längre tid kan han eller hon genom uppgiften observera om eleven utvecklats t.ex. i sin problemlösningsförmåga. Eleven kan relativt enkelt kontrollera sig själv och sina resultat i denna uppgift, genom t.ex. en tidsaxel,

ii. Hur tror ni att uppgiften kommer att fungera i klassrummet, kan alla elever arbeta med den samtidigt som den erbjuder utmaning för de särskilt begåvade eleverna? Motivera vad som krävs.

Exempel på resonemang: På grund av att uppgiften har en öppen ingång bör den fungera för alla elever i klassrummet. Beroende på hur långt eleverna har kommit i sin matematiska utveckling kan olika typer av material behöva användas för att hjälpa alla elever igång, uppgiften innehåller matematik på djup nivå med möjligheter till att generalisera på olika sätt. Uppgiften går också att utveckla ytterligare genom att ändra förutsättningarna. Uppgiften borde erbjuda utmaning för särskilt begåvade elever dels på grund av det öppna slutet samt att det uppfyller de flesta av kriterierna för en rik lärande uppgift.

B. Vilka matematiska förmågor enligt Krutetskii, (F1 – F8 i den matematikdidaktiska delen i Skolverkets (2015)) ger uppgiften möjlighet att studera hos eleven?

i. Hur tror ni att detta kommer visa sig genom elevernas arbete?

Analysens resultat av uppgiften av matematiska förmågor enligt Krutetskii, Bilaga 3, se Tabell 3. Därefter följer ett stycke som ger exempel på resonemang som lett fram till resultatet.

Resultat av analysen:

Tabell 3 Resultat av analysen av uppgift 'Lamporna' – kriterier för de matematiska förmågorna enligt Kruteteskii, ett *X* innebär att vi ansett att uppgiften uppfyller kriteriet. Elevens arbete med uppgiften bidrar med information angående förmåga F8.

Förmåga	Enl. analys
F1	X
F2	X
F3	X
F4	X
F5	X
F6	X
F7	Ev.
F8	Ev.

Exempel på resonemang:

Förmåga F1: Formalisera matematiskt material

Uppgiften ger möjlighet att visa denna förmåga eftersom det finns ett samband mellan hur lampa A och lampa B blinkar. De elever som visar denna förmåga letar troligtvis efter sambandet, studerar t.ex. lampornas blinkningar parallellt. Eleverna förstår att lamporna i sig inte är relevanta att de bara är ett verktyg att det lika gärna kunnat handla om något annat än lampor.

Förmåga F2: Förmåga att generalisera matematiskt material

Uppgiften ger möjlighet till att hitta generella samband, dels gällande när lamporna blinkar och dels gällande den maximala "mörka" tiden. Eleven kan visa detta på olika sätt beroende på var eleven är i sin matematiska utveckling. För att avgöra om eleven visar förmågan som en matematiskt särskilt begåvad elev måste naturligtvis hänsyn tas till vad som är "att förvänta" av åldersgruppen eleven hör till. Ex. på generalisering på olika nivåer:

- Att finna att lampa A blinkar enligt 4:ans tabell och lampa B enligt 7:ans tabell är en start på generalisering,
- att därefter dra slutsatsen att lamporna blinkar samtidigt när 4:ans och 7:ans tabell sammanfaller (28:ans tabell) är ytterligare än.

- Att finna det generella sambandet för den längsta ”mörka” perioden höjer abstraktionsnivån ytterligare. Om eleven hittar samband under den första 28 sekunders cykeln så är det en typ av generalisering trots att den inte är fullständig,
- för att hitta hela vägen fram måste fler cyklar tas hänsyn till, udda och jämna.
- Ytterligare möjlighet ger uppgiften till generalisering i dess utökning – går det t.ex. att finna något generellt om lampa A blinkar var x:e sekund och lampa B var y:te sekund.

Förmåga F3: Förmåga att operera med siffror och andra symboler

Uppgiften ger möjlighet till att operera med siffror och addition och/eller multiplikation. För de elever som är mogna att arbeta med variabler ger uppgiften möjlighet till detta vid generaliseringen. För elever som kommit högre i sin matematiska utveckling kan eventuellt arbete med modulo genomföras.

Elever som visar denna förmåga går troligtvis snabbt över till att laborera och arbeta med multiplikationer. Barn som är ovana med detta arbetar kanske främst strukturerat med additioner istället. Läraren kan undersöka om barnet har förmågan att arbeta med matematiska symboler genom att införa variabler för att förenkla barnets beräkningar.

Förmåga F4: Förmåga till sekventiellt, logiskt resonerande

Uppgifter har en tydlig struktur som uppmuntrar till att steg för steg ta sig framåt och finna samband, för att hitta sambandet krävs ett logiskt resonemang ”om, utifall att, etc”.

Elever som visar denna förmåga arbetar systematiskt och strukturerat, kanske använder se sig av en tidsaxel, klocka eller en tabell, eller använder sig av algebraiska metoder. Om de inte gör det kan man som lärare avväga om det är ett lämpligt tillfälle att införa något av hjälpmedlen, kan eleven trots ovana arbeta med något av dessa är det en indikation på förmåga F3.

Förmåga F5: Förmåga att förkorta resonemang

Uppgiften kan kräva ett stort tankearbete innan eleven har kommit fram till sin slutsats, vid en redogörelse av uppgiften skriftligt individuellt eller vid någon annan typ av presentation ges eleven möjlighet att visa upp sin förmåga att förkorta resonemanget genom en förfinad/förkortad lösning. Vissa elever kanske ”ser” en lösning direkt, även för dessa ger olika typer av presentationsformer möjlighet att visa upp denna förmåga.

Förmåga F6: Förmåga till flexibilitet och reversibilitet

Uppgiften ger möjlighet till flexibilitet t.ex. när det gäller i sätt att angripa problemet, det går att arbeta med tabell, tidslinje, konkret material, klockan etc. Den ger också möjlighet till att arbeta reversibelt, t.ex. kan eleven arbeta med att hitta de positioner som ger upphov till 1s, 2s respektive 3 s ”mörktid”.

Under elevens arbete med uppgiften kan man upptäcka elevens förmåga till flexibilitet t.ex. genom om en elev håller fast vid någon lösningsstrategi eller om eleven byter om någon strategi uppfattas som ogynnsam.

Förmåga F7: Förmåga att minnas matematisk information

Detta är en förmåga som bör studeras hos eleven över tid, men förmågan kan upptäckas om eleven har arbetat med liknande problem tidigare, t.ex. fylla vatten av en viss mängd med hjälp

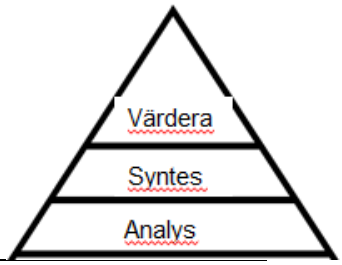
av hinkar av olika volymstorlek, eller ta tid med timglas av olika tidsmått. D.v.s. om eleven relaterar metoder han eller hon använder i andra problem, (jmf. relatera i Sheffields stjärna).

Förmåga F8: Generell fallenhet och intresse för matematik

Denna förmåga kan troligtvis inte visas enbart genom arbete med en uppgift. Här måste läraren göra en mer övergripande analys, hur är elevens allmänna inställning till matematik? Kom ihåg att skolmatematiken kan upplevas som tråkig och bromsande för entusiasm. Elevens fritidsintressen kan vara viktiga att notera här, går eleven i en matematikklubb, schackklubb etc.

Utökade frågor/aktiviteter

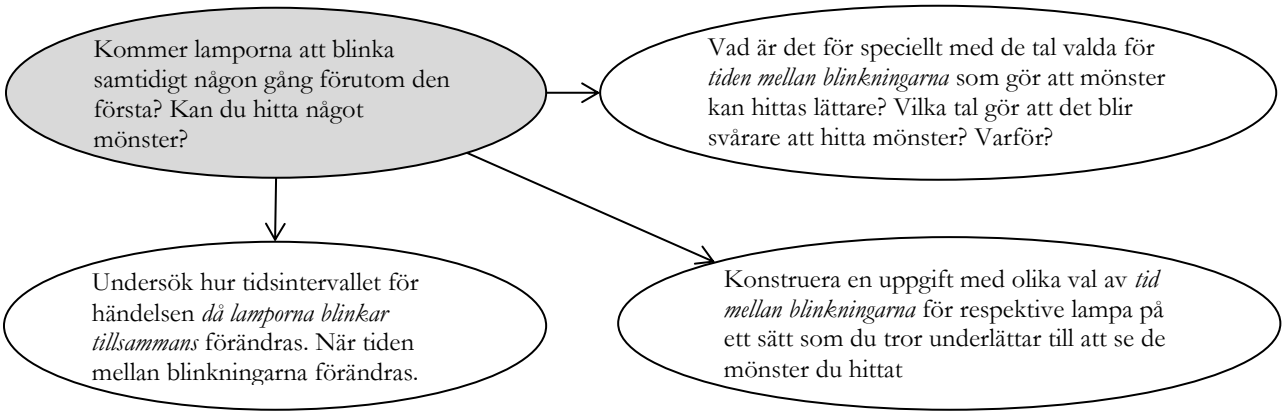
De utökade frågorna/aktiviteterna bör vara knutna till uppgiften och syfta till att träna det högre tänkandet, enligt Blooms taxonomi. Vi använde den omgjorda varianten av Blooms taxonomi (Anderson, Krathwohl, Airasian, & Bloom, 2001)



Tabell 4 Exempel på utökade frågor till uppgiften Lamporna relaterat till händelsen när lamporna blinkar samtidigt

Bloom's taxonomi	Exempel, aktivitet eller uppgift
Värdering	Vad är det för speciellt med de tal valda för *tiden mellan blinkningarna* som gör att mönster kan hittas lättare? Vilka tal gör att det blir svårare att hitta mönster? Varför?
Syntes	Konstruera en uppgift med olika val av *tid mellan blinkningarna* för respektive lampa på ett sätt som du tror underlättar för andra att hitta de mönster du hittat.
Analys	Ändra tiden mellan blinkningarna för lampa A respektive för lampa B. (*ev. leda in på primtal och sammansatta tal*) Undersök hur tidsintervallet för händelsen *då lamporna blinkar tillsammans* förändras.

I GERRIC materialet modul 5 gavs exempel på hur man kan arbeta med tankekartor för att planera frågor som kan hjälpa eleverna att träna sitt högre tänkande. Vi ger ett exempel på hur en sådan skulle kunna se ut. Även här kopplat till uppgiften Lamporna och händelsen när lamporna blinkar samtidigt, se Figur 1.



Figur 1 Tankekarta som ledning för att planera för att träna det högre tänkandet.

Förenklade frågor

I början av projektet hade vi även planerat för att utveckla uppgifterna även med syfte att hjälpa elever med matematiksvårigheter. Projekttiden räckte inte för detta, från börjanock var planen att bland annat utveckla frågor till de lägre stegen i Blooms taxonomi som ett led i den processen. För uppgiften Lamporna hade till exempel frågorna i Tabell 5 kunnat representera ett sådant arbete.

Tabell 5 Förenklade frågor till händelsen när lamporna blinkar samtidigt

Bloom's taxonomi	Exempel, aktivitet eller uppgift
Tillämpning	Formulera en programmeringssekvens som skulle styra lamporna till att uppföra sig på det beskrivna sättet. Presentera din lösning.
Förståelse	Skapa någon slags presentation som förklarar när lamporna kommer blinka samtidigt om lampa A blinkar var 4:e sekund och lampa B var 7:e sekund. Presentationen är tänkt att vara för elever som går i en klass lägre än du själv.
Kunskap	Skriv upp alla olika typer av mönster du kan hitta mellan blinkningarna för lampa A respektive lampa B. Visualisera lampblinkningarna för lampa A och lampa B på något sätt, t.ex. genom att rita, använda tabell eller bygga med något slags material. Skriv upp eller markera tiderna då lampa A och lampa B lyser samtidigt, skriv upp de samband du kan hitta mellan de gemensamma blinkningarna.

Referens

Anderson, L. W., Krathwohl, D. R., Airasian, P. W., & Bloom, B. S. (2001). A taxonomy for learning, teaching, and assessing: a revision of Bloom's taxonomy of educational objectives. New York, NY: Longman.

Differentierad undervisning

Denna bilaga ger korta sekvenser som är fritt översatta från modul 5 i GERRIC materialet, läsaren uppmanas att gå till originaltexten för att få en bättre och mer fullständig bild av vad som menas med differentierad undervisning.

Det finns många olika modeller och teorier på hur man kan arbeta för att differentiera undervisningen. I projektet har vi följt Tomlinsons (2001) modell som kallas 'Differentiated instructions', anledningen till valet är att denna modell behandlas i GERRIC materialet och av tidsskäl såväl som för att inte öka mängden litteratur ytterligare valde vi att begränsa oss till denna.

Definition: En differentierad kursplan adresserar elevers olika lärstilar och olika inlärningshastigheter i såväl heterogena klassrum som i nivågrupperade klassrum.

En orsak till varför man bör ha en differentierad undervisning är att alla elever regelbundet behöver uppleva tillfällen i sitt lärande där de når sitt 'personbästa'. I sport hyllas idrottarna när de når sitt personbästa, elit såväl som amatör, med applåder och ära. Så borde det vara även på den akademiska arenan.

Strategier att använda för att designa en differentierad kursplan

- Innehåll - modifikationer
- Process (arbetssätt) - modifikationer
- Product (resultat) - modifikationer
- Lärmiljö – modifikationer

För särskilt begåvade elever ges exempel på vad som kan vara viktigt att tänka på i modifikationer i dessa fyra delar av strategin.

Innehåll - modifikationer

- Vara abstrakt, komplext och varierande
- Involvera organisatoriska frågor, studier av människor, metoder för undersökning.

Process (arbetssätt) - modifikationer

- Ha processer som kräver ett högre ordningenens tänkande
- Främja kreativt och kritiskt tänkande
- Kräva problemlösning
- Involvera gruppinteraktion
- Ha varierande nivåer i fart
- Tillåta utvärdering/rapportering av arbetssättet
- Innehålla öppna slut

- Tillåta frihet i olika val.

Produkt (resultat) - modifikationer

- Involvera problem relaterat till verkliga världen,
- Vara avsett för en riktig ‘publik’,
- Kräva riktiga deadlines,
- Kräva transformation av lärande,
- Involvera lämplig bedömning och utvärdering,
- Involvera utökade eller accelererade resultat.

Lärmiljö - modifikationer

- Vara flexibla och öppna
- uppmuntra oberoende/fristående och verkligt lärande
- Vara accepterande och icke-dömande
- Uppmuntra komplext och abstrakt tänkande.

Vid referens:
Mellroth, E. (2017). The suitability of rich learning tasks from a pupil perspective. In T. Dooley, & G. Guedet (Eds.), Proceedings of the Tenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (pp. 1162-1169). Dublin, Ireland: Dublin City University and European Society for Research in Mathematics Education.

The suitability of rich learning tasks from a pupil perspective

Elisabet Mellroth

Karlstad University, Sweden; elisabet.mellroth@kau.se

The construction of tasks is important to challenge pupils, but it is rare to explore pupils' perceptions connected to their work with tasks. This paper presents the results of a study using a tool aimed to measure pupils' perception of joy and interest connected to 'rich learning tasks' by comparing the views of mathematically promising pupils and others. Two tasks were pre- and post-evaluated, the first by 139 and the second by 106 pupils from grade 4-9. The results indicate that the tool is suited to explore pupils' views, especially as it can be deduced from the comparison that: mathematically promising pupils perceived both tasks more positively than the other pupils, and that the non-identified pupils became more positive after working especially with one of the tasks.

Keywords: Mathematically gifted, mathematically promising, rich tasks, pupils' perception

Introduction

One of the main goals in research on mathematical giftedness is to identify and foster mathematically promising pupils (Käpnick & Benölken, 2015). The construction of mathematical tasks is seen to be important for both purposes (Fuchs & Käpnick, 2009; Nolte, 2012). It is a consensus that tasks suitable to identify and foster mathematically promising pupils should, for example, be challenging, open-ended, encourage creativity and engagement, and promote enjoyment (Fuchs & Käpnick, 2009; Nolte, 2012; Sheffield, 2003). In Sweden there is no differentiation among students, every classroom is diverse and includes pupils of all abilities. Therefore, it is interesting to explore how the work with specific tasks are perceived by all pupils in the classroom. Of special interest is the perception of the mathematical promising pupils since in a diverse classroom there is a risk that they not are given opportunities to be challenged (Leikin & Stanger, 2011). A task suitable to implement in the whole class should offer a challenge to pupils at every level, which for example rich learning task are said to do (Sheffield, 2003). However, it is rare that the assessment process of the tasks appropriateness is explored, especially from the pupils' perspective. This leads to the question how tasks aimed to support mathematically promising pupils can be evaluated by the pupils. Against the background of this question this paper presents a study aiming to explore a tool in development that investigates pupils' perception of joy and interest connected to specific tasks.

This paper gives a theoretical background on tasks suitable to challenge mathematical promising pupils and other pupils. Further, the aspect of perceived joy and interest for pupils connected to work on mathematics is elaborated. The study and its results are presented and thereafter the tool used and the interpretation of the results are discussed.

Theoretical background

Pupils in a diverse classroom naturally have different levels of knowledge. Engström and Magne (2006) showed that in Swedish classrooms the mathematical knowledge of the 15 percentage lowest achieving pupils in grade nine are on the level of a grade four pupil. Also in a mathematical classroom there is a mix of pupils, some are highly motivated while others lack motivation, some are high

achieving and others are low achieving (Boaler, 2006). All pupils should be given opportunities to learn and develop, and on task level there are ways to differentiate education to meet and challenge all pupils. One way is for example through the use of rich learning tasks, which also fulfills the criteria for tasks seen to be suitable to identify and foster mathematically promising pupils (Sheffield, 2003). Because of the Swedish context with the diverse classroom the aim is to meet and develop all pupils, however, the mathematically promising pupils are of particular interest in this study. Therefore, it is important to elaborate on what is important in a task for a mathematically promising pupil as well as for pupils in general.

First, considering the mathematically promising, it is important to give them challenging tasks to help them develop according their mathematical potential (e.g. Benölken, 2015; Koshy, Ernest, & Casey, 2009; Nolte, 2012). Open-ended tasks, like rich learning tasks, are examples of tasks known to be challenging for mathematically promising pupils (Nolte, 2012; Sheffield, 2003). In addition, the joy factor is stated as important in the development process for the mathematically promising (Fuchs & Käpnick, 2009). The importance of joy in working with mathematics is further consolidated by being strived for in activities aiming to support and foster the mathematically promising, such as for example math clubs (Benölken, 2015).

Second, considering pupils in general, Taflin (2007) states that it is important that pupils perceive the problem solving process of a task as positive, challenging, and that it stimulates their creativity. Taflin actually writes that if they do not perceive this, then it is better not to implement the tasks. As to the perspective of joy, Mellroth (2014) showed that tasks aiming to evoke joy make some pupils achieve highly, even though they do not achieve highly on traditional mathematics tests. In addition, to further strengthen that pupils' enjoyment in mathematics is important, Chen and Stevenson (1995) showed that positive attitudes and interest are significantly related to mathematical achievement. And the results of Skaalvik, Federici, and Klassen (2015) show that pupils' self-efficacy in mathematics is positively and strongly related to intrinsic motivation which they directly connected to pupils' enjoyment when working with mathematics.

Based on the theory it can be assumed that pupils' perception of interest and their positive attitudes towards the task have effect on their motivation on working with the task. This is valid for both mathematically promising pupils and for others. Therefore, it is interesting and important to explore how pupils perceive working with specific tasks, especially by comparing promising and other pupils. A developed tool, easy to use, could help teachers choosing tasks that challenge and interest all pupils.

Aim

The aim of the presented study is to investigate how to identify mathematical tasks that can stimulate all pupils in a diverse classroom, including the mathematically promising. Utilizing a pupil perspective, which stresses the importance of pupil interest and joy when working with mathematics, the study provides a comparison of data from promising children and others.

The study is conducted in Sweden within the frame of a professional development program on mathematical promise for seven in-service teachers, teaching mathematics for pupils from grade 4 to 9 (Mellroth et al., 2016).

Method

Two tasks that fulfilled the criteria of rich learning tasks were implemented in seven classrooms, i.e. all pupils in "regular" classes worked with the tasks aiming to solve them. The pupils went in grade 4 (age 10) to 9 (age 15), all grades covered. The tasks considered to be suitable to challenge all pupils, specifically mathematically promising, were chosen (Sheffield, 2003), see Figure 1 (*Task 1*) and Figure 2 (*Task 2*). In the first intervention *Task 1* was implemented: 139 pupils responded on the evaluation of the task, among them 32 pupils were identified as mathematically promising[1].

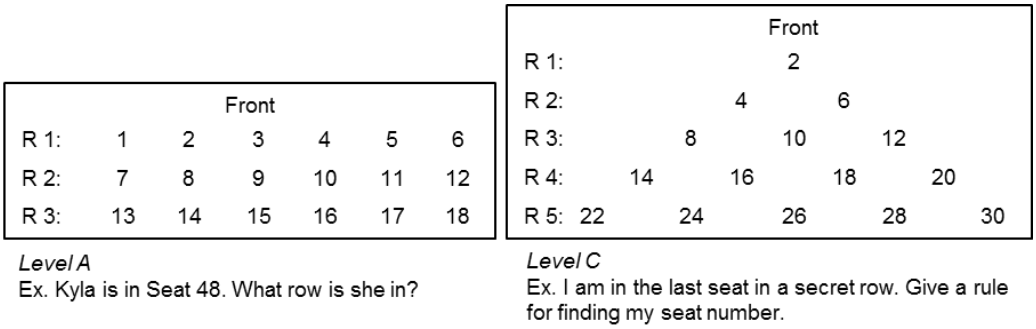


Figure 1: Example from *Task 1*, named Where am I? (Sheffield, 2003).

In the second intervention *Task 2* was implemented: 106 pupils responded, among them were 20 pupils identified as mathematically promising. All pupils did the interventions in the same order i.e. *Task 1* first and *Task 2* second.

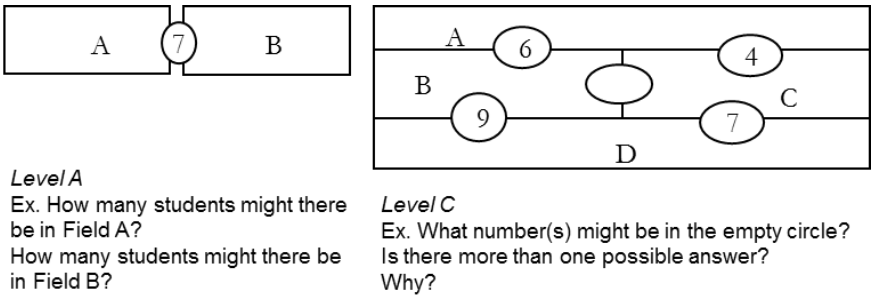


Figure 2: Example from *Task 2*, named Field of dreams (Sheffield, 2003); The number in a circle, denotes the total number of students in all adjoining fields.

The pupils involved in the two interventions all came from the same seven classes, 44 pupils did *Task 1* but not *Task 2* and 11 pupils did *Task 2* but not *Task 1*. Therefore 95 pupils participated in both interventions, 20 of those were identified as mathematically promising. Since the suitability of the tasks in the classroom was of interest, evaluations from all participating pupils were used in the analysis for each intervention.

Within the frame of the professional development program a tool how to measure pupils' perceptions on interest and joy connected to working with specific tasks was developed. In the development process experts on motivation and attitudes in mathematics education, and in educational psychology

[1] Selected through a synthesis of different tools, see Mellroth et al. (2016).

were consulted. The tool resulted in a pre-evaluation that utilized an emoji-note, Figure 3, and a post-evaluation, in which the emojis were changed to words, Figure 4. The reason for the change from emojis to words was to decrease the risk that pupils would chose the same emoji twice due to the short time, the time of one lesson, between the pre- and post evaluation.

To collect data each teacher presented a power point slide with a picture related to each task[2] in their specific classes, without revealing the actual task. Before the task was handed out to the pupils, they were asked to mark how they felt about the task by choosing an emoji on a paper given to each one of them, see Figure 3. Thereafter the pupils were given time to work with the task.

Your teacher has presented a mathematical problem.
Which emoji best matches your feeling about this problem?

Figure 3: Evaluation note before starting to work with the task, adapted from Mellroth et al. (2016).

When the teacher ended the pupils work with the task, but before the task was discussed orally in the whole classroom, pupils were asked to evaluate the task again. This time by choosing words, see Figure 4.

What words best describes how you felt about the task while working with it?

Very interesting
Interesting
Neither or
Uninteresting
Very uninteresting

Figure 4: Evaluation note after completing working with the task (Mellroth et al., 2016).

Data from all classes were collected and summarized. For the summary process pupils identified by the teachers as mathematically promising were separated from the non-identified pupils. The evaluations, see Figure 3and Figure 4, were translated to numbers from 1 to 5, where 1 was the most positive evaluation and 5 the most negative. Thereafter, a descriptive analysis was conducted. For further details of the method see Mellroth et al. (2016).

Results

The results from each task are presented in Figure 5 and Figure 6: the graphs show the distribution of pupils' perception of the task before they started to work on it. Each bar in the graph is also split to show pupils change in perception of the task after they completed working with it. For example, in the left-hand graph in Figure 5, the bar on number 2 shows that 12 pupils, identified as mathematical promising, chose the second most positive emoji before they started to work on *Task 1*. Further, the same bar shows that of those 12 pupils, five gave the task a more negative judgement, two gave it a

[2] The process of choosing and analyzing the tasks are described in Mellroth et al. (2016)

more positive judgement and five still gave them the second most positive judgement after they completed the work with the task.

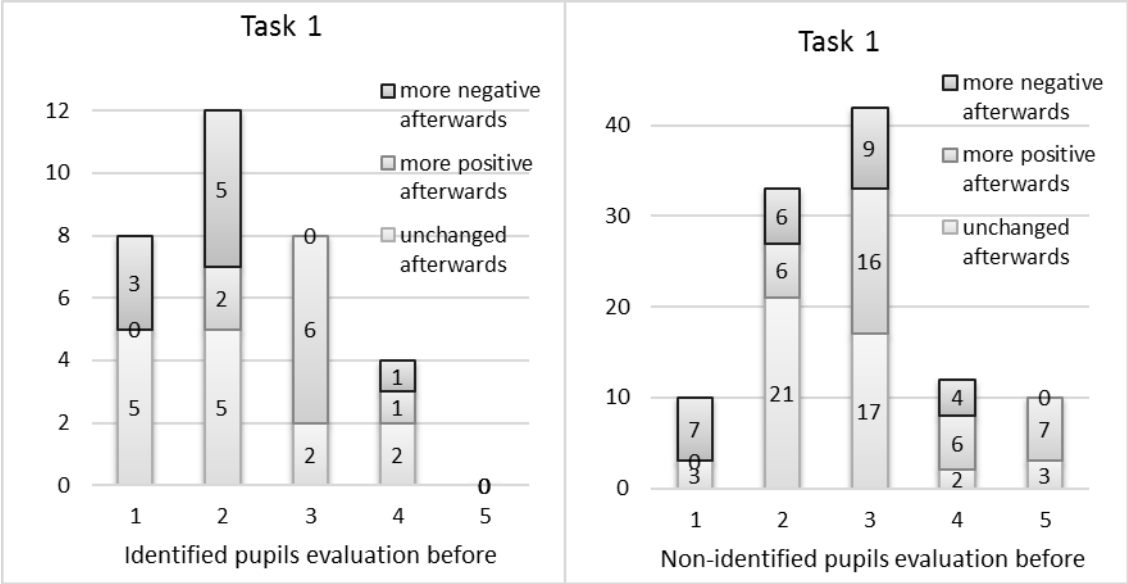


Figure 5: Pupils evaluation of *Task 1*, before starting their work on the task and after they completed their work (Figure adapted from Mellroth et al, 2016, p. 19).

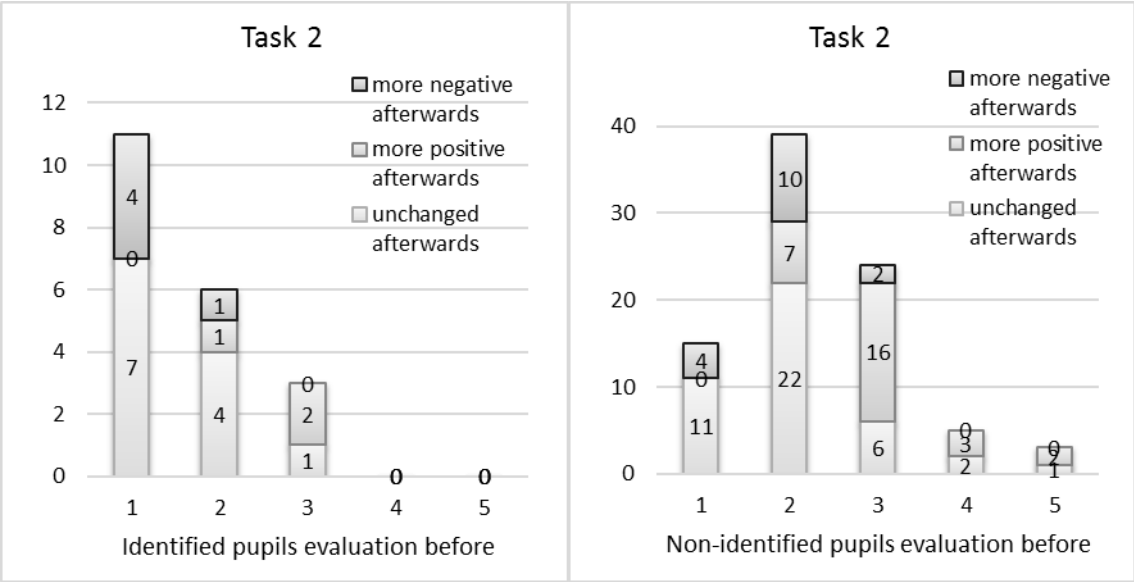


Figure 6: Pupils evaluation of *Task 2* before starting their work on the task and after they completed their work (Figure adapted from Mellroth et al, 2016, p. 19).

As both Figure 5 and Figure 6 show, through the concentration of the bars to the left, pupils identified as mathematically promising perceive both tasks more positively compared to the non-identified pupils before they started to work with the tasks. Considering *Task 1*, the two groups of pupils, identified and non-identified, did not differ much in how they changed their evaluation of the task after they completed it. 28 percent compared to 33 percent judged the task more positively after they completed it, 28 percent compared to 24 percent judged it more negatively, and 44 percent versus 43 percent judged it the same as before. As to *Task 2*, and the results of comparing identified and non-

identified pupils and how they changed their evaluation of this task after they completed it show: 15 percent compared to 33 percent gave a more positive judgement afterwards, 25 percent compared to 19 percent gave the task a more negative judgement afterwards and 60 percent compared to 49 percent did not change their judgement of the task.

Interpretations and discussion

The aim of the study was to investigate how to identify mathematical tasks that can stimulate all pupils in a diverse classroom, including the mathematically promising. The two tasks used in the study were chosen because they were rich learning tasks and said to be suitable to challenge all pupils, including the mathematically promising (Sheffield, 2003). The positive evaluation given by especially the mathematically promising pupils were expected, therefore the results can be seen to verify the developed tool.

For *Task 1* the results show that the majority of the mathematically promising pupils, before starting to work on it, evaluated it as more positive: 63 percent choose the most, or the second most positive emoji, compared to 40 percent of the non-identified pupils. For *Task 2* the comparable percentages are 85 and 63 respectively. This indicates that the mathematically promising, especially, perceived the tasks interesting and joyful already before they knew the associated question. The results show that *Task 2* has this effect to a higher extend for all pupils, also the non-identified. The post evaluation of *Task 2* shows a relatively large shift to a more positive judgement of the task for the non-identified pupils, Figure 6 right graph. Altogether the results indicate that considering pupils' perception of joy and interest, *Task 2* is suitable for all pupils in the diverse classroom, including mathematically promising pupils.

The results also indicate that *Task 1* is not as suitable for all pupils. However, even if *Task 1* is not as good as *Task 2* according to the results, the mathematical promising pupils perceived it relatively positively before starting to work on it. In addition, just as many of them judged the task more negatively as those who judged it more positively afterwards. Also slightly more pupils of the non-identified judged it more positively after the completed work compared to the number that judged it more negatively. Therefore, *Task 1* might also be a suitable task in a diverse classroom even if it is not as good as *Task 2*.

According to the chosen frame for this study, tasks challenging and stimulating for mathematically promising pupils lead to that they feel joy and develop learning (Fuchs & Käpnick, 2009; Nolte, 2012; Sheffield, 2003). The identified pupils positive evaluation of the tasks, especially *Task 2*, can be a sign of that they felt the tasks challenging and stimulating. The results for the promising pupils can also be interpreted as an indication of that the developed tool fulfills its purpose to measure pupils joy and interest in a rich learning task. Furthermore, it is indicated that the tool can grade the suitability of different tasks, concerning joy and interest, in this case *Task 2* is perceived slightly more positive than *Task 1*.

It has been found that teachers rarely provide mathematically promising pupils with learning opportunities that benefit them in the diverse classroom (Leikin & Stanger, 2011), and also that positive attitudes towards working with mathematics make pupils achieve better (Chen & Stevenson, 1995). Based on this, the results show that the tasks might provide mathematical learning

opportunities for all kind of pupils. Further development and verification of this tool can provide teachers with a simple way to find tasks that provide learning opportunities for all pupils in the diverse classroom, also for the mathematical promising.

Even if the simple tool has proven its use in principle, there are, of course, several limitations in this study, the investigation is simple and the tool used is not statistically verified. Nor does the investigation consider in depth how joy and interest is perceived by the pupils. In this study, pupils' motivation to work on a task is assumed to be connected to the perceived joy and interest. The teachers' evaluation of how the pupils worked with the implemented tasks is another important aspect, which this paper does not address. Within the frame of the professional development program the teachers observed and interviewed some pupils connected to their work with the investigated tasks; inclusion of this data would have strengthened the results (Mellroth et al., 2016). Also, to be able to compare different groups of pupils like for example mathematically promising and others (non-identified), teachers need knowledge on how to identify the different groups. In this study the teachers who collected the data participated in a professional development program on mathematical promise, their knowledge on how to identify those pupils can be considered as relatively deep. But it is needed to highlight this for someone who wants to repeat the study.

If further research is done to develop and validate the tool used here, it could provide in-service teachers with an easy and quick way to evaluate the suitability of tasks from a pupil's perspective. In turn this might result in mathematically promising pupils being presented with tasks that help them to develop according to their potential. In addition, complex single-case studies might explore specific aspects of tasks that are assessed highly by the pupils applying the tool presented in this study.

Acknowledgment

Thanks to all teachers who participated in the professional development program and who were the driving force to include pupils' perception in the investigation. Those teachers, Agneta Arwidsson, Katarina Holmberg, Annika Lindgren Persson, Charlotta Nätterdal, Lotta Perman, Sofia Sköld and Annika Thyberg, are also the co-authors to Mellroth et al. (2016).

References

Benölken, R. (2015). "Mathe für kleine Asse" – An enrichment project at the University of Münster. In F. M. Singer, F. Toader & C. Voica (Eds.), *Proc. of the 9th Math. Creativity and Giftedness International Conf.* (pp. 140–145). Sinaia, Romania: MCG.

Boaler, J. (2006). How a detracked mathematics approach promoted respect, responsibility, and high achievement. *Theory into Practice*, *45*(1), 40-46.

Chen, C. & Stevenson, H. W. (1995). Motivation and Mathematics Achievement: A Comparative Study of Asian-American, Caucasian-American, and East Asian High School Students. *Child Development*, *66*, 1215-1234.

Engström, A., & Magne, O. (2006). *Medelsta-matematik III: Eleverna räknar*. [Middle town mathematics III: Pupils are calculating]. Örebro, Sweden: Örebro University.

Fuchs, M. & Käpnick, F. (2009). *Mathe für kleine Asse. Empfehlungen zur Förderung mathematisch interessierter und begabter Kinder im 3. und 4. Schuljahr* (Vol. 2). Berlin, Germany: Cornelsen.

Koshy, V., Ernest, P., & Casey, R. (2009). Mathematically gifted and talented learners: theory and practice. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *40*(2), 213-228.

Käpnick, F. & Benölken, R. (2015). Ein konzeptioneller Ansatz zur Kennzeichnung mathematisch begabter Kinder und Möglichkeiten ihrer Diagnostik und Förderung aus fachdidaktischer Perspektive. *Journal für Begabtenförderung, 2*, 23 – 38.

Leikin, R. & Stanger, O. (2011). Teachers' images of gifted students and the roles assigned to them in heterogeneous mathematics classes. In B. Sriraman & K.H. Lee (Eds.), *The elements of creativity and giftedness in mathematics* (pp. 103–118). Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.

Mellroth, E. (2014). *High achiever! Always a high achiever?: A comparison of student achievements on mathematical tests with different aims and goals*. Licentiate thesis, Karlstad, Sweden: Karlstad University Press.

Mellroth, E., Arwidsson, A., Holmberg, K., Lindgren Persson, A., Nätterdal, C., Perman, L., Sköld, S., & Thyberg, A. (2016). *En forskningscirkel för lärare om särskild begåvning i matematik*. [A research circle for teachers on mathematical promise]. Karlstad, Sweden: Karlstad University Press.

Nolte, M. (2012, July). *Challenging math problems for mathematically gifted children*. Paper presented at the 7th Mathematical Creativity and Giftedness International Conference, Busan, Repulic of Korea. pp.27-45.

Sheffield, L. J. (2003). *Extending the challenge in mathematics: Developing mathematical promise in K-8 students*. Thousands Oaks, CA: Corwin Press.

Skaalvik, E. M., Federici, R. A., & Klassen, R. M. (2015). Mathematics achievement and self-efficacy: Relations with motivation for mathematics. *International Journal of Educational Research, 72*, 129-136

Taflin, E. (2007). *Matematikproblem i skolan: för att skapa tillfällen till lärande*. [Mathematical problems in school: To create opportunities for learning] Doctoral thesis, Umeå, Sweden: Umeå University.

Arbete med uppgiftsplanering

För respektive uppgift, utgå från detta dokument.

Välj en uppgift som alla i gruppen arbetar med samtidigt.

Varje uppgift ges 60 minuter – var strukturerade.

0 – 10 min Lös uppgiften tillsammans

10 – 20 min Individuellt – analysera uppgiften efter Krutetskiis och Sheffields kriterier.

20 – 30 min I grupp – diskutera analysen, kom överens, fyll i uppgiftsplaneringen.

30 – 60 min I grupp - utveckla utökade frågor, koppla till Blooms taxonomi. Fyll i uppgiftsplaneringen.

Försöka förutse hur implementeringen kommer fungera.

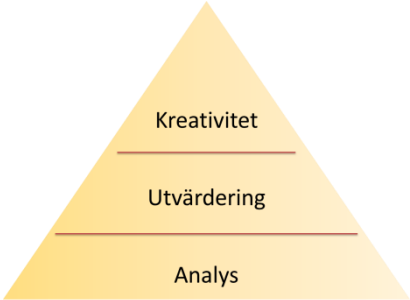
Hur och varför kommer de matematiskt särskilt begåvade eleverna att utmanas/stimuleras av respektive uppgift? Hur kommer ni kunna upptäcka detta?

Uppgiftsplanering för uppgift "Namn"

Uppgiftsformulering

Utökade frågor

Frågorna ska vara knutna till uppgiften och syfta till att träna det högre tänkandet enligt Blooms taxonomi.



Tabell 1 Utökade frågor till

Bloom's taxonomi	Exempel, aktivitet eller uppgift
4. Analys	
5. Utvärdering	
6. Kreativitet	

Material

Vilket material behöver förberedas för att kunna implementera uppgiften?

Tid

Hur mycket tid beräknar ni att uppgiften ska ta att genomföra? *Vilka elever ska vi tänka på här?*

Analys av uppgiften

Analysen av uppgiften, kriterier för *en rik lärande uppgift* (Sheffield, 2003).

Tabell 2 Fyll i tabellen efter att ni analyserat uppgiften.

Kriterie	Enl. analys
1 Alla kunna börja, utmaning på flera nivåer	
2 Finna mönster, generaliseringar, förklara, ifrågasätta.	
3 Olika arbetssätt & lösningsstrategier.	
4 Uppmuntra kreativitet & innovation.	
5 Inneha viktig matematik.	
6 Olika start-, mellanlägen, olika lösningar.	
7 Uppmuntrar till engagemang och samarbete.	
8 Kräva tänkande på högre nivå, problemlösning	
9 Främja kompetens, nöje, självständighet i matematiska förmågor.	
10 Möjliggöra att själv bedöma framgång och svårigheter	

Analys av elevernas möjligheter att visa upp följande *matematiska förmågor hos särskilt begåvade elever* (Krutetskii, 1976, översatt och tolkat i Skolverket, 2015).

Tabell 3 Fyll i tabellen efter att ni analyserat uppgiften.

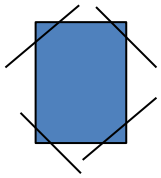
Förmåga	Enl. analys
F1	
F2	
F3	
F4	
F5	
F6	
F7	
F8	

Vikproblemet

Varje elev behöver en bra sax och ett A4-papper.

Instruktion ge muntligt inför alla samtidigt

- Vik pappret från kortsida till kortsida.
- Klipp bort varje hörn.



Innan pappret viks ut – fundera på ”hur många hål finns nu i pappret?”

- Läraren samla ihop lite förslag som ska motiveras, samla förslagen i en tabell på tavlan. Tillexempel kan tabellen se ut på följande sätt:

Antal vikningar	Antal hål	Motivering	Antal ytor	Motivering

- Därefter vik ut och kontrollera.
- Vik tillbaka igen,
- Vik ytterligare en gång kortsida till kortsida,
- Klipp bort varje hörn (behöver inte klippa där det redan är borta).

”Hur många hål finns nu i pappret?”

- Samla ihop lite förslag som ska motiveras, samla förslagen i tabellen.
- Därefter vik ut och kontrollera.

Upprepa så länge det går, lyssna på barnen/ungdomarna/de vuxna, vad upptäcker de?

Det är viktigt att skriva upp alla förslag och att låta barnen resonera – även om du vet att deras förslag är fel.

För mer forskning på denna uppgift, se till exempel följande artikel:

Nolte, M. & Pamperien, K. (2017). Challenging problems in a regular classroom setting and in a special foster programme. ZDM 49(1), 121–136. http://dx.doi.org/10.1007/s11858-016-0825-5

Schackdrottningar

En schackdrottning får röra sig längs rader, kolumner och diagonalt längs med schackbrädet. Om en pjäs står i vägen för drottningen blir denna tagen.

Går det att placera ut fem drottningar så att det inte finns en enda säker plats kvar på schackbrädet?

Registrera lösningarna på något sätt.

Vad händer om vi ändrar på antalet drottningar? Hur många rutor kan maximalt täckas?

Antalet drottningar	1	2	3	4	5
Maximalt antal täckta rutor					

Undersök olika storlekar på schackbrädet. Minst 5 drottningar krävs för att täcka 8x8 brädet. Vad är minsta antalet drottningar som krävs för att täcka ett 7x7, 6x6, 5x5,…, 2x2 bräde?

Schackbrädestorlek	2x2	3x3	4x4	5x5	6x6	7x7	8x8
Minsta antalet drottningar							

Om du bara får placera ut en drottning, hur många rutor kan du maximalt täcka på olika schackbräden?

Schackbräde-storlek	1x1	2x2	3x3	4x4	5x5	6x6	7x7	8x8
Maximala antalet rutor täckta av 1 drottning								

Går det att förutsäga hur många rutor som täcks av en drottning på vilket *n x n* bräde som helst?

Vid referens:
Mellroth, E. (2017). Developing the design of a role-play in a professional development. In S. Zehetmeier, B. Rösken-Winter, D. Potari, & M. Ribeiro (Eds.), Proceedings of the Third ERME Topic Conference on Mathematics Teaching, Resources and Teacher Professional Development (ETC3, October 5 to 7, 2016) (pp. 323-324). Berlin, Germany: Humboldt-Universität zu Berlin.

Developing the design of a role-play in a professional development

Elisabet Mellroth

Karlstad University, Sweden, elisabet.mellroth@kau.se

The poster shows how a role-play conducted by teachers can be developed through the methodology of educational design research. The role-play represents a classroom situation and is an instructional activity as part of a two-year long teacher professional development program. The implementation focuses on some of the features identified as important in an effective professional development. The aim of the role-play is to practice and deepen mathematics teachers' knowledge and skills of stimulating mathematically gifted pupils higher order thinking. After the development of the role-play, the study can move forward and include; teachers' change in instruction and pupil learning in order to study the effectiveness of the role-play as a part of a professional development program.

Keywords: Professional development, educational design research, mathematically gifted pupils.

THEORY

Regarding the effectiveness of teacher professional development (TPD) Garet, Porter, Desimone, Birman, and Yoon (2001) identified; duration, collective participation, content focusing, active learning, and coherence as important features. To study the effectiveness of a TPD-program, Desimone (2009) included the identified features in a conceptual framework. The framework includes a link between four elements; the TPD-program, teacher knowledge, teacher instruction, and pupil learning. The elements are embedded in a context, here TPD on education of mathematically gifted pupils, as an important mediator and moderator. This poster presents how a role-play, an instructional activity belonging to the first element, the TPD-program, can be developed and thereby most likely be effective. Educational Design Research (EDR) (Gravemeijer & Cobb, 2013) is used as methodology in the development process of the role-play. The development of the role-play focuses on some features identified as important for TPD (Garet et al., 2001).

BACKGROUND AND AIM

It is shown that teachers have little knowledge on how to support mathematically gifted pupils (e.g. Leikin & Stanger, 2011). Several researches recommend TPD on gifted pupils: on those pupils' educational needs and on methods of how to develop their learning (e.g. Persson, 2015). Sheffield (2003) suggests special questions to ask mathematically gifted pupils to develop their higher order thinking. In the role-play some participants in the TPD-program present a mathematical task acting as teachers in a regular classroom, and the other participants act as pupils trying to solve the task. The aim of the role-play is to develop all participating teachers' (n=17)

knowledge and skills on how to develop higher order thinking of mathematically gifted pupils. The research question guiding this poster is: How can a role-play, in a TPD-program, be developed to improve teachers' knowledge and skills of using special questions to improve higher order thinking in mathematically gifted pupils?

EXPECTED OUTCOME

The use of EDR (Gravemeijer & Cobb, 2013) to develop the role-play means that the role-play is repeated in an iterative process, after each iteration retrospective analysis is performed. In this study the analysis focuses on the five features identified as important for an effective professional development (Garet et al., 2001). The result of the analysis is expected to guide the development of the role-play.

The poster presents two iterations of the role-play and how the analysis has led to changes aimed to improve some of the features identified as important for professional development. Furthermore, the poster show how EDR might be used to develop, and thereby most likely improve, the effectiveness of the role-play as part of a TPD-program. Data in this study are video recordings from the two iterations.

REFERENCES

Desimone, L. M. (2009). Improving impact studies of teachers' professional development: Toward better conceptualizations and measures. *Educational researcher, 38*(3), 181-199.

Garet, M. S., Porter, A. C., Desimone, L., Birman, B. F., & Yoon, K. S. (2001). What makes professional development effective? Results from a national sample of teachers. *American Educational Research Journal, 38*(4), 915-945.

Gravemeijer, K., & Cobb, P. (2013). Design research from the learning design perspective. In T. Plomp, & N. Nieveen (Eds.), *Educational design research part A: An introduction* (pp. 72-113). Enschede, The Netherlands: SLO.

Leikin, R., & Stanger, O. (2011). Teachers' images of gifted students and the roles assigned to them in heterogeneous mathematics classes. In B. Sriraman & K. Lee W. (Eds.), *The elements of creativity and giftedness in mathematics* (pp.103-118). Rotterdam, The Netherlands: Sense Publisher

Persson, R. S. (2015). *Tre korta texter om att förstå särskilt begåvade barn i den svenska skolan.* [Three short texts on understanding highly able children in the Swedish school]. Jönköping, Sweden: Högskolan i Jönköping

Sheffield, L. J. (2003). *Extending the challenge in mathematics: Developing mathematical promise in K-8 students*. Thousands Oaks, CA: Corwin Press.

Uppgiftsprotokoll – Namn på uppgiften

Uppgiften i helklassrummet

1. Eleverna behövde mer förklaringar än vanligt för att komma igång med arbetet.

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

Stämmer inte alls Stämmer helt

2. Uppgiften fungerade att använda i hela klassen.

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

Stämmer inte alls Stämmer helt

Elever som förvånar

3. Var det någon elev som förvånade dig (matematiskt) i arbetet med uppgiften? *T.ex. Genom sitt annorlunda kreativa tänkande, genom sin flexibiltet, genom engagemanget etc. kopplat till Krutetskiis förmågor och/eller Sheffields definition.*

Ja Nej

4. Om ja, på vilket sätt förvånade eleven? *Fri text*

_____

_____

_____

_____

_____

Differentieringen relativt det planerade sättet

I uppgiftsplaneringen finns förslag på hur elevernas arbete med uppgiften skulle kunna differentieras, d.v.s. de utökade frågorna.

5. Klassen informerades vid starten av arbetet med uppgiften att det fanns utökade frågor.

   Ja Nej

6. Eleverna fick de utökade frågorna samtidigt som grunduppgiften.

   Ja Nej

Elever som ni anar är matematiskt särskilt begåvade (MSB) jämfört med de som ni INTE anar är MSB (inte MSB).

Fyll i hur du har upplevt vad de följande påståendena handlar om.

- På första raden för varje påstående fyller du i gällande de elever som du anar är MSB, markerat ’MSB’.
- På andra raden fyller du i gällande de elever du INTE anar är MSB, markerat ’inte MSB’

7. Eleverna var engagerade i arbetet med uppgiften			
MSB	Stämmer inte alls	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10	Stämmer helt
Inte MSB	Stämmer inte alls	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10	Stämmer helt

8. Eleverna var uthålliga i arbetet med uppgiften.			
MSB	Stämmer inte alls	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10	Stämmer helt
Inte MSB	Stämmer inte alls	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10	Stämmer helt

9. Eleverna använde sig av möjligheten uppgiften gav genom sitt öppna slut.			
MSB	Stämmer inte alls	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10	Stämmer helt
Inte MSB	Stämmer inte alls	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10	Stämmer helt

10. Eleverna använde sig av de utökade frågorna.		
MSB	Ja	Nej
Inte MSB	Ja	Nej

11. De elever som arbetade med de utökade frågorna efterfrågade en större utmaning, t.ex. frågade efter de utökade frågorna.												
MSB		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	Stämmer inte alls											Stämmer helt
Inte MSB		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	Stämmer inte alls											Stämmer helt

12. De utökade frågorna stimulerade eleverna i arbetet med uppgiften.												
MSB		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	Stämmer inte alls											Stämmer helt
Inte MSB		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	Stämmer inte alls											Stämmer helt

13. Eleverna ville arbeta med de utökade frågorna.												
MSB		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	Stämmer inte alls											Stämmer helt
Inte MSB		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	Stämmer inte alls											Stämmer helt

Möjlighet att träna ett högre tänkande

I uppgiftsplaneringen finns förslag på hur elevernas högre tänkande kan stimuleras och utmanas, d.v.s. genom de utökade frågorna.

14. De utökade frågorna användes inte därför att: *Fri text*

15. De elever som arbetade med de utökade frågorna uppmuntrades aktivt till att göra detta.

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

Stämmer inte alls Stämmer helt

16. Genom elevernas arbete med de utökade frågorna kunde jag se spår av ett högre tänkande.

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

Stämmer inte alls Stämmer helt

17. De utökade frågorna behöver korrigeras därför att: *Fri text*

Utvärdering av uppgiftsanalysen

Kriterier för en rikt lärande uppgift enligt Sheffield, Tabell 3. Förmågor enligt Krutetskii uppgiften ger möjlighet till att visa, Tabell 4. Om du anser att förändringar bör göras, markera dessa i den högra kolumnen.

Tabell 1 Tabellen kommer vara förifylld för den vänstra kolumnen för respektive uppgift

Kriterie	Enl. analys	Efter genom-förande
1 Alla kunna börja, utmaning på flera nivåer	x	
2 Finna mönster, generaliseringar, förklara, ifrågasätta.	x	
3 Olika arbetssätt & lösningsstrategier.	x	
4 Uppmuntra kreativitet & innovation.	x	
5 Inneha viktig matematik.	x	
6 Olika start-, mellanlägen, olika lösningar.	x	
7 Uppmuntrar till engagemang och samarbete.	x	
8 Kräva tänkande på högre nivå, problemlösning	x	
9 Främja kompetens, nöje, självständighet i matematiska förmågor.	?	
10 Möjliggöra att själv bedöma framgång och svårigheter	Delvis	

Tabell 2 Tabellen kommer vara förifylld för den vänstra kolumnen för respektive uppgift

Förmåga	Enl. analys	Efter
F1	X	
F2	X	
F3		
F4	X	
F5	Ev.	
F6	X	
F7		
F8	X	

F1 Förmåga att formalisera matematiskt material: att skilja form från innehåll, att operera med formella strukturer av relationer och samband.
F2 Förmåga att generalisera matematiskt material.
F3 Förmåga att operera med siffror och andra symboler.
F4 Förmåga till sekventiellt, logiskt resonerande: kunna skilja på förutsättningar för och slutsatser av ett resonemang och förmågan att dra slutsatser från givna förutsättningar.
F5 Förmåga att förkorta resonemang, klart och enkelt i slutsatser.
F6 Förmåga till flexibilitet och reversibilitet, skifta tankemodeller och vända tankegångar.
F7 Förmåga att minnas matematisk information som gör det möjligt att använda erfarenheter i nya problemlösningssituationer, exempelvis relationer mellan storheter och argumantationsscheman.
F8 Genrell fallenhet och intresse för matematik i en lust att söka matematiska aspekter av omvärlden (Krutetskii, 1976, översättning av Pettersson & Wistedt, 2013)

Elevernas ”nöjdhet” med uppgiften

Eleverna får genomföra nöjdhetsmätningen efter genomförd uppgift. Du samlar ihop data i följande tabell.

Tabell 3 Sammanställning av elevbedömningarna av uppgiften i din klass.

Antal elever som genomförde uppgiften =	Antal MSB elever	Inte MSB
☹ och L		
☹ och S		
😐 och L		
😐 och S		
☺ och L		
☺ och S		